MVE255/TMV191 Matematisk analys i flera variabler M/TD 2012–13

SAMMANFATTNING. TEORIFRÅGOR.

Teorifrågor är inrutade nedan.

Kap 11.1. Vektorvärd funktion $\mathbf{v}(t)$. Deriveringsregler, Sats 1.

Kap 11.3. Parametrisering av kurvor: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad a \le t \le b$

Tangent (hastighet): $\mathbf{v} = \mathbf{T} = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$

Fart: $v = |\mathbf{v}|$. Acceleration: $\mathbf{a} = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}$

Längd: $L = \displaystyle\int_a^b \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right| \mathrm{d}t$ Båglängd: $s = \displaystyle\int_a^t \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}u}\right| \mathrm{d}u$

Båglängdselement: $\mathrm{d}s = \left|\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right| \mathrm{d}t$

Båglängdsparametrisering: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \quad 0 \le s \le L$

Fart: $v = |\mathbf{T}| = \left|\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\right| = 1$

Kap 11.4. Krökning. Endast sid 642–644.

I båglängdsparametrisering: enhetstangenten $\hat{\mathbf{T}} = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}$

Krökning: $\kappa(s) = \left|\dfrac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{T}}}{\mathrm{d}s}\right|$. Krökningsradie: $\rho(s) = 1/\kappa(s)$.

Derivering av $1 = |\hat{\mathbf{T}}|^2 = \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{T}}$, ger $0 = 2\hat{\mathbf{T}}(s) \cdot \dfrac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{T}}}{\mathrm{d}s}$, så att en normal fås av $\mathbf{N}(s) = \dfrac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{T}}}{\mathrm{d}s}$

Enhetsnormalen: $\hat{\mathbf{N}}(s) = \dfrac{\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{T}}}{\mathrm{d}s}}{\left|\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{T}}}{\mathrm{d}s}\right|}$

Binormalen: $\hat{\mathbf{B}}(s) = \hat{\mathbf{T}}(s) \times \hat{\mathbf{N}}(s)$

Kap 11.5. Krökning i allmän parametrisering. Endast sid 649 och Exempel 2 sid 651.

Exempel 2. Graf: $y = f(x)$. Kunna formeln $\kappa(x) = \dfrac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}$

Kap 12.1. Visualisering.

Graf: $z = f(x, y)$

Nivåkurvor: $f(x, y) = C$

Nivåytor: $f(x, y, z) = C$

MATLAB: `meshgrid, mesh, surf, slice`

Kap 12.2. Definition av gränsvärde.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

dvs $f(x, y) \to L$ då avståndet $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \to 0$.

Kunna avgöra om gränsvärde existerar i enkla fall.

Definition av kontinuitet.

Kap 12.3. Definition av partiell derivata.

Graf: $z = f(x, y)$. Beräkna tangenter, normalvektor och tangentplanets ekvation (sid 684–685).

Kap 12.4. Partiella derivator av högre ordning.

Kunna Sats 1 (Blandade derivator är lika) utan bevis.

Exempel 3 (Laplaces ekvation). Exempel 4 (Vågekvationen).

Kap 12.5. Kedjeregeln. Endast sid 693–696 och Exempel 10, sid 700.

Date: 2013–05–16, Stig Larsson, Matematiska vetenskaper, Chalmers tekniska högskola.

Kap 12.6. Deriverbarhet (sid 703–709).

Linjäriseringen: $L(x,y) = f(a,b) + f_1'(a,b)h + f_2'(a,b)k, \quad h = x-a,\ k = y-b$

Funktionen $f(x,y)$ är deriverbar i (a,b) om linjäriseringen är en bra approximation till $f(x,y)$ nära (a,b). Mera precist (Definition 5): om

$$\lim_{\sqrt{h^2+k^2}\to 0} \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b) - f_1'(a,b)h - f_2'(a,b)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Ej Sats 3.

Sats 4 (Om partiella derivatorna kontinuerliga i omgivning till (a,b) så är f deriverbar i (a,b).) Utan bevis.

Sats 5 (Kedjeregeln.) Utan bevis.

Jacobi och Newton. Linjärisering. Jacobimatris. Newtons metod.

Kunna skriva dessa saker på matrisform. Kedjeregeln på matrisform.

Teori: Härledning av Newtons metod med hjälp av linjärisering.

Kunna skriva ned algoritmen med MATLAB-beteckningar:

```
function x = newton(f,x0,tol)

x = x0;
h = tol + 1;

while norm(h)>tol
   A = jacobi(f,x);      % evaluate the Jacobian A=Df(x)
   b = -f(x);            % evaluate the residual b=-f(x)
   h = A\b;              % solve the linearized equation
   x = x + h;            % update
end
```

Kap 12.7. Gradient och riktningsderivata. (Ej "Rates perceived..." sid 720.)

Nabla-operatorn: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$

Teori: Sats 6 (Gradienten är normalvektor till nivåkurva.) Med bevis.

Definition av riktningsderivata: $\mathrm{D}_{\mathbf{u}} f(a,b) = \frac{d}{dt} f(a+tu, b+tv)\Big|_{t=0}$.

Teori: Sats 7 ($\mathrm{D}_{\mathbf{u}} f(a,b) = \mathbf{u}\cdot\nabla f(a,b)$) Med bevis.

Tolkning av gradienten som den riktning dit f ökar mest.

Kap 12.9. Taylors formel. Endast Taylor-polynom av grad ≤ 2:

$$\begin{aligned} P_2(x,y) &= f(a,b) + f_x'(a,b)h + f_y'(a,b)k + \tfrac{1}{2}(f_{xx}''(a,b)h^2 + 2f_{xy}''(a,b)hk + f_{yy}''(a,b)k^2) \\ &= f(a,b) + \begin{bmatrix} f_x'(a,b) & f_y'(a,b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xx}''(a,b) & f_{xy}''(a,b) \\ f_{xy}''(a,b) & f_{yy}''(a,b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

med Jacobi-matrisen (gradientvektorn) och Hesse-matrisen

$$f'(a,b) = \nabla f(a,b) = \begin{bmatrix} f_x'(a,b) & f_y'(a,b) \end{bmatrix}, \quad f''(a,b) = D^2 f(a,b) = \begin{bmatrix} f_{xx}''(a,b) & f_{xy}''(a,b) \\ f_{xy}''(a,b) & f_{yy}''(a,b) \end{bmatrix}$$

Kap 13.1. Extremvärdesproblem.

Sats 1 (Nödvändiga villkor för extremvärde.) Utan bevis.

Sats 2 (Tillräckliga villkor för extremvärde.) Utan bevis.

Sats 3 (Andra-derivata-testet.) Utan bevis.

Kunna undersöka funktion $f\colon \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ med avseende på extrempunkter (max, min, sadelpunkter) med hjälp av Sats 1 och Sats 3. Använd ej "Remark" sid 748! Det är en ointressant handräkningsmetod som bara fungerar då $N=2$. Godkänns ej på tentamen.

Kap 13.2. Extremvärdesproblem i begränsat område. Ej "Linear programming".
Kunna söka max och minpunkter: inre singulär punkt eller inre kritisk punkt eller randpunkt.

Kap 14.1. Dubbelintegralen.
Kunna definiera dubbelintegralen $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A$ som gränsvärde av Riemann-summa.
Kunna integralens egenskaper sid 794 utan bevis.

Kap 14.2. Kunna beräkna dubbelintegral med upprepad integration om området är enkelt i y-led eller enkelt i x-led.

Kap 14.3. Generaliserad dubbelintegral. Medelvärdessatsen.
Integralen $\iint_D f(x,y)\,dA$ är generaliserad om D är obegränsad eller om f är obegränsad i D. Om $f(x,y) \geq 0$ i D så är integralen antingen konvergent eller så divergerar den mot oändligheten. Då kan man avgöra om integralen är konvergent eller divergent genom upprepad integration.
Sats 3 (Medelvärdessatsen.) Utan bevis.

Kap 14.4. Polära koordinater.
Viktigt att kunna räkna med polära koordinater.
Areaelementet: $\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$
Allmän variabeltransformation: $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$
Areaelementet: $\mathrm{d}A = \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$
obs: det är absolutbeloppet av Jacobi-determinanten (determinanten av Jacobi-matrisen)

Kap 14.5. Trippelintegralen $\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}V$
Kan beräknas med upprepad integration om området är enkelt.

Kap 14.6. Variabeltransformation.
Allmän variabeltransformation: $\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$
Volymselementet: $\mathrm{d}V = \left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$
obs: det är absolutbeloppet av Jacobi-determinanten (determinanten av Jacobi-matrisen)
Cylinderkoordinater. Viktigt!
Sfäriska koordinater. Viktigt!

Kap 14.7. Endast "Moments and Centres of Mass" sid 833–836.

FEM1. Randvärdesproblem i 1-D. Finita elementmetoden.

$$\begin{aligned} &-D(a(x)Du(x)) = f(x), && \text{för } x \in I = (K,L), \\ &a(x)D_n u(x) + k(x)(u(x) - u_A) = g(x), && \text{för } x = K,\ x = L. \end{aligned}$$

Känna igen och känna betydelsen av alla termer i randvärdesproblemet för värmeledning och mekanik.
Teori: Härled den svaga formuleringen för problem av denna typ.
Kunna lösa enkla specialfall genom upprepad integration.
Kunna använda MATLAB-programmet `MyPoissonSolver.m`.
Teori: Kunna härleda finita elementmetoden.

Kap 15.1. Vektorfält. Skalärt fält. Fältlinjer. (Sid 842–846.)

Kap 15.2. Konservativt fält om $\mathbf{F} = \nabla\phi$. (Sid 849–851.)

Kap 15.3. Kurvintegral.

Parametrisera kurvan, sedan $\int_C f\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|\mathrm{d}t$.

Beror ej på valet av parametrisering.

Kap 15.4. Tangentkurvintegral.

Integrera tangentkomponenten av vektorfält:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{T}}\,\mathrm{d}s = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|}\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|\mathrm{d}t = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,\mathrm{d}t\ .$$

Tangentbåglängdselementet: $\mathrm{d}\mathbf{r} = \hat{\mathbf{T}}\,\mathrm{d}s = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\,\mathrm{d}t$.

Sats 1 (Oberoende av vägen.) Utan bevis.

Kap 15.5. Ytintegral. Ej ”The attraction ...” sid 878.

Parametrisera ytan S, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ dvs

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \qquad a \le u \le b,\ c \le v \le d. \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

Koordinatkurvor:

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0), \quad a \le u \le b,$

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v), \quad c \le v \le d.$

Tangenter: $\frac{\partial\mathbf{r}(u_0,v_0)}{\partial u}, \frac{\partial\mathbf{r}(u_0,v_0)}{\partial v}$

En normalvektor: $\mathbf{N} = \frac{\partial\mathbf{r}(u_0,v_0)}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}(u_0,v_0)}{\partial v}$

Areaelementet: $\mathrm{d}S = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

Ytintegralen: $\iint_S f\,\mathrm{d}S = \iint_D f(\mathbf{r}(u,v))\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

Teori: Graf: $z = f(x,y)$. Härled ytelementet $\mathrm{d}S = \sqrt{1 + f'_x(x,y)^2 + f'_y(x,y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Kunna parametrisera ytor med hjälp av cylinderkoordinater och sfäriska koordinater.

Kap 15.6. Flödesintegral (normalytintegral).

Orienterbar yta: har enhetsnormalvektorfält $\hat{\mathbf{N}}$ som varierar kontinuerligt över S.

Orienterad yta: när vi valt ett sådant normalvektorfält (”upp eller ned”) säger vi att ytan är orienterad. Vi har valt en orientering.

Integrera normalkomponenten av vektorfält:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S.$$

Kap 16.1. Div, grad, rot.

Kunna definition av dessa deriveringsoperatorer.

Kap 16.2. Deriveringsregler för div, grad, rot.

Teori: Sats 3. Bevis av a,b,c,d,g,h.

Sats 4 utan bevis.

FEM2. Randvärdesproblem i flera variabler. Finita elementmetoden.

Teori: Härled följande partialintegrationsformel i tre variabler:

$$\iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\phi\,\mathrm{d}V = \iint_S \hat{\mathbf{N}}\cdot\mathbf{F}\phi\,\mathrm{d}S - \iiint_D \mathbf{F}\cdot\nabla\phi\,\mathrm{d}V$$

Teori: Härled värmeledningsekvationen: $-\nabla\cdot(a\nabla u) = f$ i D.

Känna igen och känna betydelsen av alla termer i randvärdesproblemet för värmeledning:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a\nabla u) = f & \text{i } D, \\ a\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}} u + k(u - u_{\mathrm{A}}) = g & \text{på } S_2 \text{ (Neumann/Robin)}, \\ u = u_{\mathrm{A}} & \text{på } S_1 \text{ (Dirichlet)}, \end{cases}$$

Teori: Härled den svaga formuleringen för problem av denna typ.

Kunna skriva ned randvillkor för diverse värmeledningsproblem.

Kunna skriva in randvillkor i PDE Toolbox.

Kap 16.3. Greens formel i planet.
Sats 7 utan bevis. Mycket viktig.

Kap 16.4. Teori: Formulera Gauss divergenssats i rummet (Sats 8). Utan bevis. Mycket viktig!
Sats 9 utan bevis. Mindre viktig.

Kap 16.5. Stokes sats utan bevis. Mindre viktig.