MVE255/TMV191 Analys i flera variabler M+TD

DATORÖVNING 4 — FINITA ELEMENTMETODEN I 1-D

Allmänt. Dokumentera ditt arbete i ett pdf-dokument. Spara detta till examinationen och så att du kan läsa på inför tentamen. Datorövningarna examineras genom duggorna i Maple TA. Dessutom kommer ett väsentligt antal tentamensfrågor handla om detta material.

Samarbete uppmuntras, men detta är inget grupparbete. Varje student måste göra sina egna datorprogram och sina egna dokument. Den som inte har full kontroll över detta klarar inte examinationen.

Mål. Att lära hur man löser randvärdesproblem i en variabel med finita elementmetoden i Matlab. Detta är även en förberedelse för Matlabs PDE Toolbox för finita element i två variabler.

Litteratur. `FEM1`.

Matlab-program. `MyPoissonSolver.m`. `BdryData1.m`. `EqData1.m`.

Kopiera filerna genom att klicka på länkarna här eller gå till länken "Matlab" på kurshemsidan och ladda ned dem därifrån. Skriv `help MyPoissonSolver` på kommandoraden och läs dokumentationen.

Inledning. Programmet `MyPoissonSolver` löser randvärdesproblem av typen

$$\begin{aligned} &-\mathrm{D}(a(x)\mathrm{D}u(x)) + d(x)\mathrm{D}u(x) + c(x)u(x) = f(x), && \text{för } x \in I = (K, L), \\ &a(x)\mathrm{D}_n u(x) + k(x)(u(x) - u_A(x)) = g(x), && \text{för } x = K,\ x = L. \end{aligned}$$

Här är $\mathrm{D} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ och D_n riktningsderivatan i utåtriktningen, dvs $\mathrm{D}_n = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ i $x = K$ och $\mathrm{D}_n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ i $x = L$. Programmet bygger på finita elementmetoden med styckvis linjära funktioner.

Funktionen `MyPoissonSolver` med deklarationen

```
function [U, A, b] = MyPoissonSolver(p, t, e, EqData, BdryData)
```

ställer upp och löser ekvationssystemet $AU = b$, där A är styvhetsmatrisen, b är lastvektorn och vektorn U innehåller nodvärdena $U_i = U(x_i)$ till finita elementlösningen $U(x) = \sum_{i=1}^{n} U_i \phi_i(x)$.

Information om beräkningsnätet lagras i matriserna `p,t,e` med samma struktur som i Matlabs PDE Toolbox som vi ska använda senare (även i mekanikkursen). Problemets data, a, d, c, f, u_A, g, definieras i funktionsfilerna `EqData.m` och `BdryData.m`.

Matrisen `p`. Koordinaterna för noderna

$$K = x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = L$$

lagras i vektorn `p` av typ $1 \times n$.

Matrisen `t` av typ $3 \times (n-1)$ innehåller information om de $n-1$ intervallen

$$I_i = (x_i, x_{i+1}), \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Närmare bestämt innehåller kolonn nr i de index (pekare) som pekar på ändpunkterna i intervall nr i, dvs

$$\begin{bmatrix} i \\ i+1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Den tredje siffran är ett märke ("subdomain reference tag"), som jag satt till 1 här, och som kan användas till att markera vilket delområde som intervallet I_i tillhör, om man fått för sig att dela in intervallet $I = (K, L)$ i delområden. Detta kan vara praktiskt om koefficienterna ges av olika formler i olika delar av I.

Matrisen `e` innehåller information om randpunkterna,

$$e = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Date: 2013–04–29, Stig Larsson, Matematiska vetenskaper, Chalmers tekniska högskola.

Här är första raden pekare (index) som pekar på de två randpunkterna, här x_1 och x_n. Den andra raden är märken (”reference tags”) som används för att markera vilken randpunkt det är, här betyder 1 vänster ändpunkt och 2 höger ändpunkt. Eftersom man använder pekare spelar det ingen roll i vilken ordning man skriver dem. Följande matris ger samma resultat:

$$e = \begin{bmatrix} n & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Detsamma gäller matrisen `t`.

Detta kan verka onödigt krångligt, men det är en bra förberedelse för PDE Toolbox, där denna struktur behövs för att beskriva en indelning av ett två-dimensionellt område i trianglar. I två dimensioner finns ju ingen naturlig numrering av punkter, trianglar och randpunkter och man måste använda pekare på detta vis. I PDE Toolbox syftar `p,t,e` på ”points”, ”triangles”, ”edges”.

Uppgifter.

Uppgift 1. Styckvis linjär funktion. Skapa ett nät i intervallet $I = (0, 1)$ med endast $n = 9$ punkter (så att man kan tydligt se alla).

```
>> n=9
>> p=linspace(0,1,n)
>> t=[1:n-1; 2:n; ones(1,n-1)]
>> e=[1 n; 1 2]
```

Skapa och plotta en styckvis linjär funktion, till exempel,

```
>> V=sin(7*p)
>> plot(p,V,'.-')
```

Kom ihåg att funktionen kan skrivas som en linjär kombination av basfunktionerna:

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} V_i \phi_i(x),$$

där $V_i = V(x_i)$ är nodvärdena som vi skapade nyss. Skapa och plotta även en av basfunktionerna, till exempel ϕ_5. (Se Figur 3 i FEM1.)

Uppgift 2. MyPoissonSolver. Kör programmet med samma nät och med de bifogade funktionsfilerna `EqData1.m` och `BdryData1.m`. Läs dokumentationen (`help MyPoissonSolver`) och filerna för att se vilket randvärdesproblem det är. (Det är ett av Problem 1.1–1.5 i FEM1.)

```
>> [U, A, b] = MyPoissonSolver(p, t, e, @EqData1, @BdryData1);
```

Titta på styvhetsmatrisen A och se att den är tridiagonal.
Plotta den approximativa lösningen U och den exakta lösningen u.
Förfina nätet till $n = 101$ punkter och beräkna igen.

Uppgift 3. Värmeledning i inhomogent material. Lös följande randvärdesproblem

$$\begin{aligned} -\mathrm{D}(a\mathrm{D}u) &= f \quad \text{i } I = (0, 1), \\ u(0) = u(1) &= 0, \end{aligned}$$

med

$$f(x) = x, \quad a(x) = 1 \text{ för } x < 1/2,\ a(x) = 10 \text{ för } x > 1/2.$$

Detta är Datorövning 6 från lp2. Vad är den fysikaliska betydelsen?

Du bör skriva nya funktionsfiler `EqData3.m` och `BdryData3.m` för denna uppgift.

Uppgift 4. Stång av två material. Lös följande randvärdesproblem

$$-\,\mathrm{D}(EA\,\mathrm{D}u) = \rho g A \quad \text{i } I = (0, L),$$
$$u(0) = 0,\ E(L)A\,\mathrm{D}u(L) = P,$$

med

$$E(x) = \begin{cases} 7, & x < L/2, \\ 22, & x > L/2, \end{cases} \quad \rho(x) = \begin{cases} 3, & x < L/2, \\ 8, & x > L/2, \end{cases}$$

och $L = 1,\ A = 1,\ g = 9.81$. Här har vi använt dimensionlösa storheter, dvs alla variabler är multipler av lämpligt valda referensvärden. Till exempel, E ges som multipel av $E_0 = 10^{10}$ N/m^2 och ρ som multipel av $\rho_0 = 10^3$ kg/m^3 (aluminium och järn).

Experimentera med olika värden på P. Vad är den mekaniska betydelsen av randvärdesproblemet?

Skriv nya funktionsfiler `EqData4.m` och `BdryData4.m` för denna uppgift.

Frivillig uppgift: Visa att med referensvärden

$$E_0 = 10^{10}\,\mathrm{N/m^2},\ \rho_0 = 10^3\,\mathrm{kg/m^3},\ L_0 = 1\,\mathrm{m},\ g_0 = 1\,\mathrm{m/s^2},\ A_0 = 10^{-4}\,\mathrm{m^2},$$

blir enheterna för u och P

$$u_0 = \frac{\rho_0 g_0 L_0^2}{E_0} = 10^{-7}\,\mathrm{m},\ P_0 = \rho_0 g_0 A_0 L_0 = 10^{-1}\,\mathrm{N}.$$

Uppgift 5. Elasticitet i rotationssymmetri. Lös följande randvärdesproblem (i polära koordinater)

$$-\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} - \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{r^2}u = \frac{1-\nu^2}{E}K_r \quad \text{för } r \in I = (a, b),$$
$$u(a) = 0,\ u'(b) = 0.$$

med $K_r = \rho\omega^2 r$. Se Rotel. Innan man kan använda finita elementmetoden måste ekvationen skrivas om till formen $-\mathrm{D}(a\mathrm{D}u) + cu = f$. Gör följande omskrivning:

$$-\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}) + \frac{1}{r^2}u = \frac{1-\nu^2}{E}\rho\omega^2 r.$$

och sedan

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}) + \frac{1}{r}u = \frac{1-\nu^2}{E}\rho\omega^2 r^2.$$

Välj lämpliga värden på $a, b, \rho, \omega, E, \nu$. Obs att den inre radien a bör vara > 0. Vad är den mekaniska betydelsen av detta problem?

Skriv nya funktionsfiler `EqData5.m` och `BdryData5.m` för denna uppgift.