Matematik Chalmers

Tentamen i MVE255 Matematisk analys i flera variabler M, 2011–05–24, f V

Telefon: Dawan Mustafa 0703–088304
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 6 poäng, om inte annat anges, totalt 50 poäng. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost. Granskning: tisdag 14 juni, 10–12, hos Stig Larsson.

---

1. Varje deluppgift är värd 2 poäng.

(a) Låt $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Beräkna $\nabla\rho$.

(b) Skriv ned Taylors polynom av grad 2 kring punkten $(1, 1)$ för $f(x, y) = x^3y^5$.

(c) Skriv ned en partialintegrationsformel för flervariabelfunktioner. (Bevis krävs ej.)

(d) Låt V vara volymen av området D vars randyta är S med utåtriktat enhetsnormalvektorfält $\hat{\mathbf{N}}$. Visa att $V = \frac{1}{3}\iint_S \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, \mathrm{d}S$ där $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

2. Beräkna integralen $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ där $\mathbf{F} = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + \mathbf{k}$ och C är spiralen som parametriseras av $\mathbf{r}(t) = \cos(t)\mathbf{i} + \sin(t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $t \in [0, 3\pi]$.

3. (a) Skriv ned finita elementbasfunktionerna ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 för ett nät som består av en enda triangel T med hörnen (noderna) $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$, $P_3 = (0, 1)$. (2 p)

(b) Matrisen M med elementen $m_{ij} = \iint_T \phi_i(x, y)\phi_j(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ kallas *massmatrisen*. Beräkna ett av elementen, till exempel, m_{11}. (4 p)

Tips: basfunktionerna är av formen $\phi(x, y) = a + bx + cy$ och lika med 1 en av noderna och 0 i de övriga.

4. Beräkna ett steg av Newtons metod för systemet

$$\begin{cases} x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 1 = 0 \\ x_2x_3^2 - x_3 = 0 \\ x_3^4 - 1 = 0 \end{cases}$$

med startpunkt $(1, 0, 1)$.

5. Beräkna största och minsta värdet av funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ i området som ges av $x \le 0$, $y \le 0$ och $x + y \ge -3$.

6. Beräkna utflödet av vektorfältet $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ från området som ligger innanför paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$ och ovanför x, y-planet.

7. Vi studerar värmeledning i kuben $D = \{(x, y, z) : 0 \le x, y, z \le L\}$. Vi har inga värmekällor och värmeledningskoefficienten varierar enligt formeln $5(1 + x/L)$ `[J/(m K s)]`. På ytorna $x = 0$ och $x = L$ har vi isolering med värmeöverföringskoefficienten 7 `[J/(m^2 s K)]`. De övriga sidorna har ingen isolering alls. Omgivningens temperatur är 40 `[K]`. Skriv ned randvärdesproblemet. (Skriv inte bara vad det blir utan motivera och formulera väl.)

8. Härled värmeledningsekvationen i en kropp D i rummet. Förklara alla beteckningar och ange deras enheter. Du behöver inte härleda randvillkoren.

/stig

MVE255 Matematisk analys i flera variabler M, 2011–05–24, f V. Lösningar.

---

1. (a)

$$\begin{aligned}
\rho'_x &= \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{\rho}\\
\rho'_y &= \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{y}{\rho}\\
\rho'_z &= \frac{\partial}{\partial z}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{z}{\rho}\\
\nabla\rho &= \frac{1}{\rho}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
&f(x,y) = x^3y^5, \quad f'_x(x,y) = 3x^2y^5, \quad f'_y(x,y) = 5x^3y^4\\
&f(1,1) = 1, \quad f'_x(1,1) = 3, \quad f'_y(1,1) = 5\\
&f''_{xx}(x,y) = 6xy^5, \quad f''_{xy}(x,y) = 15x^2y^4, \quad f''_{yy}(x,y) = 20x^3y^3\\
&f''_{xx}(1,1) = 6, \quad f''_{xy}(1,1) = 15, \quad f''_{yy}(1,1) = 20\\
&h = x-1,\ k = y-1\\
&P_2(x,y) = P_2(1+h,1+k) = 1 + \begin{bmatrix}3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h\\ k\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}h & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 15\\ 15 & 20\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h\\ k\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(c)

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\phi\,\mathrm{d}V = \iint_S \hat{\mathbf{N}}\cdot\mathbf{F}\phi\,\mathrm{d}S - \iiint_V \mathbf{F}\cdot\nabla\phi\,\mathrm{d}V$$

(d) Divergenssatsen ger

$$\iint_S \mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S = \iiint_D \nabla\cdot\mathbf{r}\,\mathrm{d}V = \iiint_D 3\,\mathrm{d}V = 3V.$$

2. Vi har

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) &= \cos(t)\mathbf{i} + \sin(t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t\in[0,3\pi],\\
\dot{\mathbf{r}}(t) &= -\sin(t)\mathbf{i} + \cos(t)\mathbf{j} + \mathbf{k},
\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\dot{\mathbf{r}}(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{3\pi} (-\cos(t)\mathbf{i} - \sin(t)\mathbf{j} + \mathbf{k})\cdot(-\sin(t)\mathbf{i} + \cos(t)\mathbf{j} + \mathbf{k})\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{3\pi} (\cos(t)\sin(t) - \sin(t)\cos(t) + 1)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{3\pi} 1\,\mathrm{d}t = 3\pi.
\end{aligned}$$

3. (a) Vi använder ansatsen $\phi(x,y) = a+bx+cy$. Basfunktionen ϕ_1 bestäms av ekvationssystemet

$$\begin{cases} \phi_1(0,0) = a = 1 \\ \phi_1(1,0) = a+b = 0 \\ \phi_1(0,1) = a+c = 0 \end{cases} \quad \text{dvs } a=1,\ b=-1,\ c=-1.$$

Basfunktionen ϕ_2 bestäms av ekvationssystemet

$$\begin{cases} \phi_2(0,0) = a = 0 \\ \phi_2(1,0) = a+b = 1 \\ \phi_2(0,1) = a+c = 0 \end{cases} \quad \text{dvs } a=0,\ b=1,\ c=0.$$

Basfunktionen ϕ_3 bestäms av ekvationssystemet

$$\begin{cases} \phi_3(0,0) = a = 0 \\ \phi_3(1,0) = a+b = 0 \\ \phi_3(0,1) = a+c = 1 \end{cases} \quad \text{dvs } a=0,\ b=0,\ c=1.$$

Vi får $\phi_1(x,y) = 1-x-y,\ \phi_2(x,y) = x,\ \phi_3(x,y) = y.$

(b) Upprepad integration ger

$$\begin{aligned} m_{11} &= \iint_T \phi_1(x,y)^2 \,\mathrm{d}A = \iint_T (1-x-y)^2 \,\mathrm{d}A = \int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{1-y} (1-x-y)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{y=0}^{1} \Big[-\tfrac{1}{3}(1-x-y)^3\Big]_{x=0}^{1-y} \mathrm{d}y = \int_0^1 \tfrac{1}{3}(1-y)^3 \,\mathrm{d}y = \Big[-\tfrac{1}{12}(1-y)^4\Big]_0^1 = \tfrac{1}{12}. \end{aligned}$$

Det krävs inte i uppgiften men de övriga matriselementen kan beräknas på liknande sätt. Massmatrisen blir då

$$M = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4.

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 1 \\ x_2 x_3^2 - x_3 \\ x_3^4 - 1 \end{bmatrix}$$

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 4x_1^3 & 4x_2^3 & 4x_3^3 \\ 0 & x_3^2 & 2x_2x_3 - 1 \\ 0 & 0 & 4x_3^3 \end{bmatrix},$$

Residualen: $b = -f(1,0,1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Jacobi-matrisen: $A = f'(1,0,1) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Lös den linjäriserade ekvationen: $Ah = b$, $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\quad h = \begin{bmatrix} -0.25 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Uppdatera: $x = x_0 + h = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.25 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

5. Vi har $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ och området är en triangel med hörn i $(0,0)$, $(-3,0)$ och $(0,-3)$

1. Stationära punkter ges av

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 2x - y + 1 = 0 \\ f'_y(x,y) &= 2y - x + 1 = 0 \end{aligned}$$

med enda lösningen $(x,y) = (-1,-1)$. Den ligger i området. Hesse-matrisen är

$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

med egenvärdena 1 och 3. Matrisen är positivt definit. Vi har alltså lokalt minimum i $(-1,-1)$ med $f(-1,-1) = -1$.

2. På randen $y = 0$ har vi $f(x,0) = x^2 + x$, $x \in [-3,0]$. Lokalt minimum i $x = -\frac{1}{2}$ med $f(-\frac{1}{2},0) = -\frac{1}{4}$ och lokala maxima i ändpunkterna: $f(-3,0) = 6$ och $f(0,0) = 0$.

3. På randen $x = 0$ har vi $f(0,y) = y^2 + y$, $y \in [-3,0]$. Samma som i förra fallet. Vi får lokalt minimum $f(0,-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$ och lokala maxima i ändpunkterna: $f(0,-3) = 6$ och $f(0,0) = 0$.

4. På randen $x + y = -3$ har vi $y = -x - 3$ och

$$f(x,-x-3) = x^2 + (-x-3)^2 - x(-x-3) + x + (-x-3) = 3x^2 + 9x + 6, \quad x \in [-3,0].$$

Lokalt minimum i $x = -\frac{3}{2}$ med $f(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}$ och samma värden som förut i ändpunkterna.

5. Av ovanstående framgår att $\max f(x,y) = 6$ och $\min f(x,y) = -1$.

6. Vi ska beräkna flödesintegralen

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, \mathrm{d}S = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, \mathrm{d}S + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, \mathrm{d}S$$

där $\hat{\mathbf{N}}$ är det utåtriktade enhetsnormalvektorfältet och

$$\begin{aligned} &S_1 : z = 0,\ x^2 + y^2 \leq 4 \text{ är bottenytan,} \\ &S_2 : z = 4 - x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 4 \text{ är den buktiga ytan.} \end{aligned}$$

På S_1 har vi $\hat{\mathbf{N}} = -\mathbf{k}$ och $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{k}) = 0$ så att den första integralen blir 0.

Ytan S_2 parametriseras av

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (4 - x^2 - y^2)\mathbf{k}, \quad x^2 + y^2 \leq 4.$$

En normalvektor fås av

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \hat{\mathbf{N}} = \frac{\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y}{|\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y|} = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}.$$

Vi ser att den pekar utåt. Vi får $\mathrm{d}S = |\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ och

$$\hat{\mathbf{N}}\, \mathrm{d}S = \frac{\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y}{|\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y|} |\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k})\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

och

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, \mathrm{d}S &= (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k})\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = (2x^2 + 2y^2 + z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\ &= (2x^2 + 2y^2 + 4 - x^2 - y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = (4 + x^2 + y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Integralen blir

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, \mathrm{d}S &= 0 + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, \mathrm{d}S \\ &= \iint_{S_2} (4 + x^2 + y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 + r^2)\, r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta = 2\pi \Big[4\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4} \Big]_0^2 = 24\pi. \end{aligned}$$

Alternativt kan vi använda divergenssatsen:

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S &= \iiint_D \nabla\cdot F\,\mathrm{d}V = \iiint_D 3\,\mathrm{d}V = 3\iiint_D \mathrm{d}V \\ &= 3\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2}\int_{z=0}^{4-r^2}\mathrm{d}z\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(4-r^2)r\,\mathrm{d}r = 3\cdot 2\pi\cdot 4 = 24\pi.\end{aligned}$$

7. Vi har $a(x,y,z) = 5(1+x/L)$, $f=0$, $g=0$. Differentialekvationen är

$$-\nabla\cdot\big(a\nabla u\big) = -\nabla\cdot\big(5(1+x/L)\nabla u(x,y,z)\big) = 0.$$

På ytan $x = L$ har vi $\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{i}$ och $\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}} = \frac{\partial}{\partial x}$ och $a(L,y,z) = 5(1+1) = 10$, $k=7$, $u_{\mathrm{A}} = 40$. Vi får

$$a\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}}u + k(u-u_{\mathrm{A}}) = 10\frac{\partial u(L,y,z)}{\partial x} + 7\big(u(L,y,z)-40\big) = 0.$$

På ytan $x = 0$ har vi $\hat{\mathbf{N}} = -\mathbf{i}$ och $\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}} = -\frac{\partial}{\partial x}$ och $a(L,y,z) = 5(1+0) = 5$, $k=7$, $u_{\mathrm{A}} = 40$. Vi får

$$a\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}}u + k(u-u_{\mathrm{A}}) = -5\frac{\partial u(0,y,z)}{\partial x} + 7\big(u(0,y,z)-40\big) = 0.$$

På övriga sidor gäller $u = 40$. Randvärdesproblemet blir

$$\begin{cases} -\nabla\cdot\big(5(1+x/L)\nabla u(x,y,z)\big) = 0, \\ -5\dfrac{\partial u(0,y,z)}{\partial x} + 7\big(u(0,y,z)-40\big) = 0, \\ 10\dfrac{\partial u(L,y,z)}{\partial x} + 7\big(u(L,y,z)-40\big) = 0, \\ u(x,0,z) = u(x,L,z) = u(x,y,0) = u(x,y,L) = 40, \end{cases}$$

för $0 \le x,y,z \le L$.

8. Se FEM2.

`/stig`