Matematik Chalmers

Tentamen i MVE255 Matematisk analys i flera variabler M, 2012–09–01, f V

Telefon: Oskar Hamlet 0703–088304
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 6 poäng, om inte annat anges, totalt 50 poäng. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost.

---

1. Varje deluppgift är värd 2 poäng.

(a) Bestäm båglängdselementet för kurvan $\mathbf{r}(t) = 2\cos(t)\mathbf{i} + 2\sin(t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$.

(b) Bestäm en ekvation för tangentlinjen till kurvan $\mathbf{r}(t) = 2\cos(t)\mathbf{i} + 2\sin(t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ i punkten (2,0,0).

(c) Bestäm linjäriseringen av $f = x^2 + y^2 + z^2$ kring punkten (1,1,1).

(d) Beskriv hur man plottar grafen $z = xy^2$ i Matlab.

2. Beräkna arean av ytan

$$\mathbf{r}(u, v) = \sin(u)\cos(v)\mathbf{i} + \sin(u)\sin(v)\mathbf{j} + \cos(u)\mathbf{k}, \quad 0 \le u \le \pi,\ 0 \le v \le 2\pi.$$

3. (a) En tillverkare har räknat ut att vinsten av att tillverka x DVD-spelare och y CD-spelare blir

$$P(x, y) = 8x + 10y - 0.001(x^2 + xy + y^2) - 10000 \text{ kr.}$$

Beräkna vilken produktion som ger maximal vinst. (Du måste visa att det är maximum genom att beräkna egenvärdena till Hesse-matrisen för full poäng.) (3 p)

(b) Beskriv på ett begripligt sätt hur man gör detta med Matlab som i Datorövning 3. (3 p)

4. Beräkna ett steg av Newtons metod för systemet

$$\begin{cases} x_1^5 + x_2^4 + x_3^4 - 1 = 0 \\ x_2 x_3^2 - x_3 = 0 \\ x_3^4 - 1 = 0 \end{cases}$$

med startpunkt $(1, 0, 1)$.

5. Skriv ned randvärdesproblemet för värmeledning i kvadraten $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, med värmeledningskoefficienten 3, källtätheten 2 och omgivande temperaturen 10 på alla sidor. På sidan $y = 0$ har vi värmeöverföringskoefficienten 7 medan övriga sidor har oändligt stor värmeöverföringskoefficient. Inga värmekällor på randen.

6. Låt P vara kroppen som begränsas av de tre koordinatplanen och planet $2x + 2y + z = 6$, dvs pyramiden med hörn i (0,0,0), (3,0,0), (0,3,0) och (0,0,6). Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ut ur pyramiden P.

7. Beräkna arbetet som uträttas av kraftfältet $\mathbf{F} = \mathrm{e}^x\cos(y)\mathbf{i} - \mathrm{e}^x\sin(y)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ på en kropp som förflyttas från punkten $(0, \pi/2, 1)$ till punkten $(1, \pi, 3)$.

8. Härled den svaga formuleringen av randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a\nabla u) = f \quad \text{i } D, \\ a\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}} u + k(u - u_{\mathrm{A}}) = g \quad \text{på } S. \end{cases}$$

/stig

MVE255 Matematisk analys i flera variabler M, 2012–09–01, f V. Lösningar.

---

1. (a) $\mathbf{r}(t) = 2\cos(t)\mathbf{i} + 2\sin(t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $\mathbf{r}'(t) = -2\sin(t)\mathbf{i} + 2\cos(t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathrm{d}s = |\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t = \sqrt{5}\,\mathrm{d}t$
(b) $\mathbf{r}(t) = 2\cos(t)\mathbf{i}+2\sin(t)\mathbf{j}+t\mathbf{k}$, $\mathbf{r}'(t) = -2\sin(t)\mathbf{i}+2\cos(t)\mathbf{j}+\mathbf{k}$. Med $t = 0$: $\mathbf{r}(0) = 2\mathbf{i}+0\mathbf{j}+0\mathbf{k}$, $\mathbf{r}'(0) = 0\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 1\mathbf{k}$. Tangentens ekvation:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + t\mathbf{r}'(0)$$

dvs

$$\mathbf{r}(t) = 2\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} + t(0\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 1\mathbf{k})$$

eller

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 0 + 2t \\ z &= 0 + t \end{aligned}$$

(c) $L(x, y, z) = 3 + [2, 2, 2] \begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{bmatrix}$

(d)

```
>> x=linspace(-1,1)
>> [X,Y]=meshgrid(x,x)
>> Z=X.*Y.^2
>> surf(X,Y,Z)
```

2. Vi beräknar tangenter:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_u &= \cos(u)\cos(v)\mathbf{i} + \cos(u)\sin(v)\mathbf{j} - \sin(u)\mathbf{k}, \\ \mathbf{r}'_v &= -\sin(u)\sin(v)\mathbf{i} + \sin(u)\cos(v)\mathbf{j}. \end{aligned}$$

En normalvektor

$$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = ... = \sin^2(u)\cos(v)\mathbf{i} + \sin^2(u)\sin(v)\mathbf{j} + \sin(u)\cos(u)\mathbf{k}$$

med längden

$$|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| = ... = \sqrt{\sin^2(u)} = \sin(u)$$

för $\sin(u) \geq 0$ i det aktuella intervallet. Arean blir

$$A = \iint_S \mathrm{d}S = \iint_D |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi} 2\,\mathrm{d}v = 4\pi.$$

3. Vi har

$$P(x, y) = 8x + 10y - 0.001(x^2 + xy + y^2) - 10000.$$

Kritiska punkter ges av

$$\begin{aligned} P'_x(x, y) &= 8 - 0.001(2x + y) = 0 \\ P'_y(x, y) &= 10 - 0.001(x + 2y) = 0 \end{aligned}$$

vilket förenklas till

$$\begin{aligned} 2x + y &= 8000 \\ x + 2y &= 10000 \end{aligned}$$

med lösningen $x = 2000$, $y = 4000$. Hessematrisen är

$$\begin{bmatrix} P''_{xx} & P''_{xy} \\ P''_{yx} & P''_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.002 & -0.001 \\ -0.001 & -0.002 \end{bmatrix}$$

Den är konstant. Egenvärdena är -0.001 och -0.003, dvs negativa. Alltså, maximum för $x = 2000$ och $y = 4000$. Maximala vinsten är 18000 kr.

(b) Filen `funk.m`

```
function y=funk(x)
y=8*x(1)+10*x(2)-0.001*(x(1)^2+x(1)*x(2)+x(2)^2) - 10000 ;
```

Filen `gradfunk.m`

```
function g=gradfunk(x)
g=jacobi(@funk,x);
g=g';
```

Kommandorader:

```
>> x=newton(@gradfunk,[0;0],1e-6)
>> H=jacobi(@gradfunk,x)
>> eig(H)
```

4.

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1^5 + x_2^4 + x_3^4 - 1 \\ x_2 x_3^2 - x_3 \\ x_3^4 - 1 \end{bmatrix}$$

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 5x_1^4 & 4x_2^3 & 4x_3^3 \\ 0 & x_3^2 & 2x_2x_3 - 1 \\ 0 & 0 & 4x_3^3 \end{bmatrix},$$

Residualen: $b = -f(1,0,1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Jacobi-matrisen: $A = f'(1,0,1) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Lös den linjäriserade ekvationen: $Ah = b$, $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $h = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Uppdatera: $x = x_0 + h = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

5. På sidan $y = 0$ har vi $g = 0$ och den utåtriktade normalvektorn $\hat{\mathbf{N}} = -\mathbf{j}$ så att randvillkoret blir

$$a\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}}u + k(u - u_{\mathrm{A}}) = 3(-\mathbf{j}) \cdot \nabla u(x,0) + 7(u(x,0) - 10) = -3\frac{\partial u(x,0)}{\partial y} + 7(u(x,0) - 10) = 0.$$

Randvärdesproblemet är

$$\begin{cases} -3\Delta u(x,y) = 2 \quad \text{för } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1, \\ u(x,1) = u(0,y) = u(1,y) = 10, \\ -3\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial y} + 7(u(x,0) - 10) = 0, \end{cases}$$

där $\Delta u = \nabla \cdot \nabla u$.

6. Divergenssatsen ger

$$
\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S &= \iiint_P \nabla\cdot\mathbf{F}\,\mathrm{d}V \\
&= \iiint_P (2+2y)\,\mathrm{d}V \\
&= \int_0^3 \int_0^{3-y} \int_0^{6-2x-2y} (2+2y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^3 \int_0^{3-y} \big[2z+2yz\big]_0^{6-2x-2y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^3 \int_0^{3-y} (12-4x+8y-4xy-4y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^3 \big[12x-2x^2+8xy-2x^2y-4xy^2\big]_0^{3-y}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^3 (18+6y-10y^2+2y^3)\,\mathrm{d}y = \frac{63}{2}
\end{aligned}
$$

7. Vi kollar först att fältet är konservativt:

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathrm{e}^x\cos(y) & -\mathrm{e}^x\sin(y) & 2 \end{vmatrix} \\
&= \Big(\frac{\partial}{\partial y}2 - \frac{\partial}{\partial z}(-\mathrm{e}^x\sin(y))\Big)\mathbf{i} \\
&\quad - \Big(\frac{\partial}{\partial x}2 - \frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{e}^x\cos(y))\Big)\mathbf{j} \\
&\quad + \Big(\frac{\partial}{\partial x}(-\mathrm{e}^x\sin(y)) - \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{e}^x\cos(y))\Big)\mathbf{k} \\
&= (0-0)\mathbf{i} - (0-0)\mathbf{j} + (\mathrm{e}^x\sin(y) - \mathrm{e}^x\sin(y))\mathbf{k} = \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

Okay, då finns en potential ϕ. Den ges av $\nabla\phi = \mathbf{F}$, dvs ekvationerna

$$
\begin{aligned}
\phi'_x &= F_1 = \mathrm{e}^x\cos(y), \\
\phi'_y &= F_2 = -\mathrm{e}^x\sin(y), \\
\phi'_z &= F_3 = 2,
\end{aligned}
$$

vilka integreras till

$$
\begin{aligned}
\phi(x,y,z) &= \mathrm{e}^x\cos(y) + f(y,z), \\
\phi(x,y,z) &= \mathrm{e}^x\cos(y) + g(x,z), \\
\phi(x,y,z) &= 2z + h(x,y).
\end{aligned}
$$

En jämförelse av dessa ger att

$$
\phi(x,y,z) = \mathrm{e}^x\cos(y) + 2z + C.
$$

Arbetet blir nu

$$
W = \Big[\phi(x,y,z)\Big]_{P_1}^{P_2} = \Big[\mathrm{e}^x\cos(y) + 2z\Big]_{P_1}^{P_2} = 4 - \mathrm{e}.
$$

8. Se FEM2.

`/stig`