Matematik Chalmers

Tentamen i MVE255 Matematisk analys i flera variabler M, 2014–01–15, f V

Telefon: Jakob Hultgren 0703–088304
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 6 poäng, om inte annat anges, totalt 50 poäng. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost. Granskning: torsdag 6 februari, 12.00–13.00, hos Stig Larsson.

---

1. Varje deluppgift är värd 2 poäng.

(a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ellipsoiden med ekvationen $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ i punkten $(1, 2, \sqrt{2})$.

(b) Visa att vektorfältet $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + (1 + x^2 - y^2)\mathbf{j}$ är konservativt och bestäm en potential.

(c) Bestäm tangentlinjen till kurvan $C\colon \mathbf{r}(t) = \cos(3t)\mathbf{i} + \sin(4t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ i punkten $(-1, 0, \pi^2)$. Tangentlinjen ska anges på parameterform.

(d) Beskriv hur man löser ekvationssystemet

$$x^2 - y = 0; \quad x^2 + y^2 - 1 = 0$$

med programmet `newton.m` från datorövningarna. Du behöver inte skriva ned `newton.m` och `jacobi.m` men du ska skriva ned den m-fil och de kommando-rader som behövs på ett begripligt sätt.

2. Beräkna den linjära approximationen till $f(x) = x_1 e^{x_2 x_3} - \sqrt{x_1 - x_2^2}$ kring punkten $(4, 1, 0)$.

3. Bestäm de absoluta max- och min-värdena till funktionen $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3$ i rektangeln $D\colon 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2$.

4. (a) Randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} -\,\mathrm{D}(a(x)\mathrm{D}u(x)) &= 0 \quad \text{för } x \in (0, L), \\ u(0) = u_0,\ u(L) &= u_L, \end{aligned}$$

beskriver ett värmeledningsproblem. Beskriv med ord vilket värmeledningsproblem det är. Ange vad de olika termerna betyder. (Skriv kortfattat och bra, annars ingen poäng.)

(b) Lös detta randvärdesproblem med $a(x) = k(1 + x/L)$ där k är en konstant.

(c) Antag att $u_0 - u_L = 10$ [K], $L = 1$ [m] och $k = 10$ [J/(mKs)]. Bestäm värmeflödestätheten j [J/(m^{2}s)].

5. Beräkna integralen $\iiint_R z \,\mathrm{d}V$, där R är det område i första oktanten som begränsas av ytorna $z = 1 - x^2$ och $y = x$.

6. Vi har ett vätskeflöde med hastighetsfältet $\mathbf{V} = V(2\frac{x}{L}\mathbf{i} + 2\frac{y}{L}\mathbf{j} + 3\frac{z}{L}\mathbf{k})$. Beräkna volymsflödeshastigheten $\iint_S \mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ uppåt genom ytan S, som är den del av planet $2x + 3y + z = 6L$ som ligger i första oktanten. Här är L [m] och V [m/s] konstanter med de angivna SI-enheterna. Vilken enhet har volymsflödeshastigheten? Tips: parametrisera ytan med $u = x/L$, $v = y/L$.

7. Härled den svaga formuleringen av randvärdesproblemet i uppgift 4.

8. Härled partialintegrationsformeln

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\phi \,\mathrm{d}V = \iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F}\phi \,\mathrm{d}S - \iiint_D \mathbf{F} \cdot \nabla\phi \,\mathrm{d}V$$

/stig

MVE255 + TMV191 2014-01-15
Lösningar

1. (a) Vi har en nivåyta: $f(x,y,z) = 4x^2+y^2+4z^2-16=0$

Vi beräknar gradienten: $\nabla f(x,y,z) = 8x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 8z\,\mathbf{k}$

En normalvektor i $(1,2,\sqrt{2})$ ges av

$$\nabla f(1,2,\sqrt{2}) = 8\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\sqrt{2}\,\mathbf{k}$$

En ekvation för tangentplanet:

$$8(x-1) + 4(y-2) + 8\sqrt{2}(z-\sqrt{2}) = 0$$

$$2x + y + 2\sqrt{2}z = 8$$

(b) $$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & 1+x^2-y^2 & 0 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(1+x^2-y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy)\right)\mathbf{k} = 0$$

Alltså: konservativt

Potential ϕ ges av: $\nabla\phi = \mathbf{F}$

dvs $$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 2xy \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = 1+x^2-y^2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

vilket ger $$\begin{cases} \phi(x,y,z) = x^2y + f(y,z) \\ \phi(x,y,z) = y + x^2y - \frac{1}{3}y^3 + g(x,z) \\ \phi(x,y,z) = h(x,y) \end{cases}$$

Tag $$f(y,z) = y - \tfrac{1}{3}y^3 + C$$
$$g(x,z) = C$$
$$h(x,y) = x^2y + y - \tfrac{1}{3}y^3 + C$$

Alltså: $\phi(x,y) = x^2y + y - \frac{1}{3}y^3 + C$

1 (c) $\mathbf{r}(t) = \cos(3t)\,\mathbf{i} + \sin(4t)\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$

$\mathbf{r}(\pi) = \cos(3\pi)\,\mathbf{i} + \sin(4\pi)\,\mathbf{j} + \pi^2\,\mathbf{k} = -\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \pi^2\,\mathbf{k}$

$\mathbf{r}'(t) = -3\sin(3t)\,\mathbf{i} + 4\cos(4t)\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}$

$\mathbf{r}'(\pi) = 0\,\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\pi\,\mathbf{k}$

Tangentlinjen på parameterform:

$$\begin{cases} x = -1 + 0t \\ y = 0 + 4t \\ z = \pi^2 + 2\pi t \end{cases}$$

1. (d) Filen funk.m : function y = funk(x)

y = [x(1)^2 - x(2); x(1)^2 + x(2)^2 - 1];

Kommandorad: >> x = newton(@funk, [0;0], 1e-6)

---

2) $f(x) = x_1 e^{x_2 x_3} - \sqrt{x_1 - x_2^2}$

$f(4,1,0) = 4 - \sqrt{3}$

$f'(x) = \left[e^{x_2 x_3} - \frac{1}{2\sqrt{x_1 - x_2^2}},\ x_1 x_3 e^{x_2 x_3} - \frac{-2x_2}{2\sqrt{x_1 - x_2^2}},\ x_1 x_2 e^{x_2 x_3} \right]$

$f'(4,1,0) = \left[1 - \frac{1}{2\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ 4 \right]$

$L(x) = 4 - \sqrt{3} + \left[1 - \frac{1}{2\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ 4 \right] \begin{bmatrix} x_1 - 4 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - 0 \end{bmatrix}$

---

3) A. Kritiska punkter ges av

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 4x - 4 = 0 \\ f'_y(x,y) = 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (1,1),\ f(1,1) = 0$$

ligger i D

B. På randen $y = 0$: $f(x,0) = 2x^2 - 4x + 3 =$

$= 2(x^2 - 2x) + 3 = 2(x-1)^2 - 2 + 3 = 2(x-1)^2 + 1$

Lokalt min vid $x=1$: $f(1,0)=1$
Lokala max i ändpunkterna: $f(0,0)=3$, $f(3,0)=9$

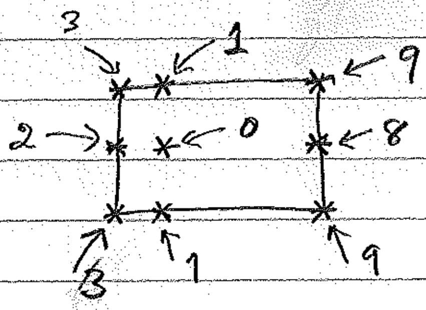
C. På randen $x=3$: $f(3,y)= y^2-2y+9=(y-1)^2+8$

Lokalt min: $f(3,1)=+8$
Lokala max: $f(3,0)=9$, $f(3,2)=9$

D. På randen $y=2$: $f(x,2)=2x^2-4x+3=$
$=2(x-1)^2+1$
Lokalt min: $f(1,2)=1$
Lokala max: $f(0,2)=3$, $f(3,2)=9$

E. På randen $x=0$: $f(0,y)=y^2-2y+3=(y-1)^2+2$

Lokalt min: $f(0,1)=2$
Lokala max: $f(0,0)=3$, $f(0,2)=3$



Absolut min: $f(1,1)=0$

Absolut max: $f(3,0)=f(3,2)=9$

---

4) a) Värmeledning i platta med tjocklek L.
Temperaturen $u(x)$.
Värmeledningskoefficient $a(x)$
Omgivande temperatur u_0 och u_L.
Inga värmekällor.

b) $-D\left(k\left(1+\frac{x}{L}\right)Du(x)\right)=0$ Integrera två ggr.
$-k\left(1+\frac{x}{L}\right)Du(x)=C$

$$Du(x) = -\frac{C}{k\left(1+\frac{x}{L}\right)}$$

$$u(x) = -\frac{CL}{k}\ln\left(1+\frac{x}{L}\right) + D$$

Randvillkoren ger:

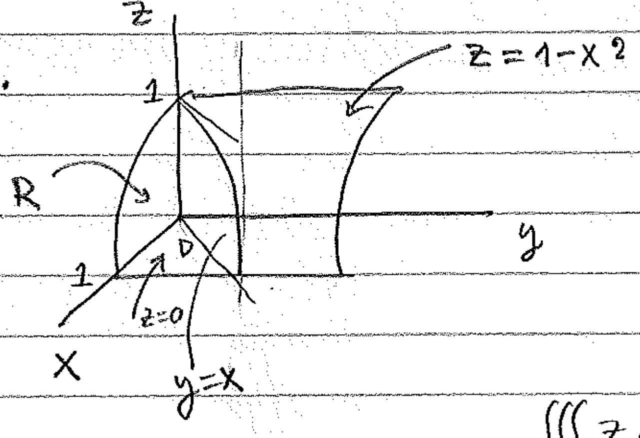
$$\begin{cases} u_0 = u(0) = -\frac{CL}{k}\underbrace{\ln(1)}_{=0} + D = D \Rightarrow D = u_0 \\ u_L = u(L) = -\frac{CL}{k}\ln(2) + \underbrace{D}_{=u_0} \Rightarrow C = -\frac{k}{\ln(2)L}(u_L - u_0) \end{cases}$$

$$u(x) = (u_L - u_0)\frac{\ln\left(1+\frac{x}{L}\right)}{\ln(2)} + u_0$$

c) $$j = -a(x)Du(x) = -k\left(1+\frac{x}{L}\right)Du(x) = C = \frac{k}{\ln(2)L}(u_0 - u_L)$$

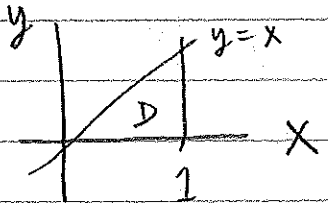
$$= \frac{10\ J/(mKs)}{\ln(2)\cdot 1\,m}\cdot 10\ K = \frac{100}{\ln(2)}\ \frac{J}{m^2 s}$$

5.



R är enkelt i z:

$$0 = a(x,y) \le z \le b(x,y) = 1-x^2$$
där $(x,y) \in D$



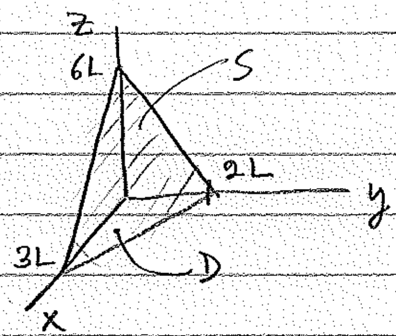
$$\iiint_R z\,dV = \iint_D \left(\int_0^{1-x^2} z\,dz\right)dA =$$

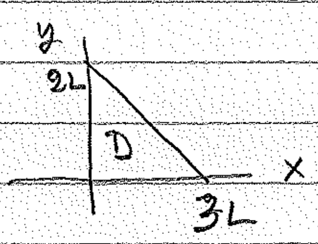
$$= \iint_D \frac{1}{2}(1-x^2)^2\,dA = \frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_0^x (1-x^2)^2\,dy\right)dx$$

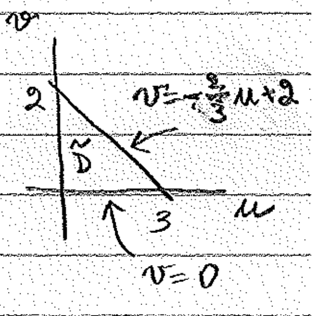
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x^2)^2\,dx = \frac{1}{12}$$

6) $\mathbb{V} = V\left(2\frac{x}{L}\mathbb{i} + 2\frac{y}{L}\mathbb{j} + 3\frac{z}{L}\mathbb{k}\right)$

Ytan är en graf: $z = 6L - 2x - 3y$, $(x,y) \in D$







Parametrisering: $\begin{cases} x = Lu \\ y = Lv \\ z = 6L - 2uL - 3vL \end{cases}$ $\quad (u,v) \in \tilde{D}$

Tangenter: $\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} = L\mathbb{i} - 2L\mathbb{k}$, $\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} = L\mathbb{j} - L\mathbb{k}$

En normalvektor:

$$\mathbb{N} = \pm \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} = \pm L^2(2\mathbb{i} + 3\mathbb{j} + \mathbb{k})$$

Välj + för uppåtriktning.

Flödeshastigheten: $\iint_S \mathbb{V} \cdot d\mathbb{S} = \iint_S \mathbb{V} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS =$

$$= \iint_{\tilde{D}} \mathbb{V} \cdot \frac{\mathbb{N}}{|\mathbb{N}|} |\mathbb{N}|\, dA = \iint_{\tilde{D}} \mathbb{V} \cdot \mathbb{N}\, dA =$$

$$= \iint_{\tilde{D}} V\left(2u\,\mathbb{i} + 2v\,\mathbb{j} + 3(6 - 2u - 3v)\mathbb{k}\right) \cdot L^2(2\mathbb{i} + 3\mathbb{j} + \mathbb{k})\, dA =$$

$$= VL^2 \iint_{\tilde{D}} (-2u - 3v + 18)\, dA = VL^2 \int_0^3 \left(\int_0^{-\frac{2}{3}u + 2} (-2u - 3v + 18)\, dv \right) du =$$

$$= VL^2 \int_0^3 \left[(-2u+18)\left(-\frac{2}{3}u+2\right) - \frac{3}{2}\left(-\frac{2}{3}u+2\right)^2 \right] du =$$

$$= VL^2 \int_0^3 \left[\frac{2}{3}(-u+9)(6-2u) - \frac{3}{2}\frac{1}{9}(6-2u)^2 \right] du$$

$$= VL^2 \int_0^3 \left[\frac{2}{3}(54-24u+2u^2) - \frac{1}{6}(6-2u)^2 \right] du$$

$$= VL^2 \left[\frac{2}{3}\left(54u - 12u^2 + \frac{2}{3}u^3\right) - \frac{1}{6}\frac{(6-2u)^3}{3\cdot(-2)} \right]_0^3$$

$$= VL^2 (48-6) = 42\,VL^2 \quad \left[\frac{m^3}{s}\right]$$

---

7. Multiplicera med testfunktion v med $v(0) = v(L) = 0$ och integrera partiellt:

$$0 = -\int_0^L D(aDu)v\,dx = -\left[aDu\,v\right]_0^L + \int_0^L aDuDv\,dx$$

$$= -a(L)Du(L)\underbrace{v(L)}_{=0} + a(0)Du(0)\underbrace{v(0)}_{=0} + \int_0^L aDuDv\,dx$$

$$= \int_0^L aDuDv\,dx$$

> Finn u sådan att $u(0) = u_0$, $u(L) = u_L$ och
>
> $$\int_0^L aDuDv\,dx = 0$$
>
> för alla v med $v(0) = v(L) = 0$.

8) Se FEM 2.

/Stig