Matematik Chalmers

Tentamen i MVE255+TMV191 Flervariabelanalys M, TD, Övningstentamen, 2010–11

Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost.

---

1. Beräkna integralen

$$\iiint_D (x+y)z \, \mathrm{d}V$$

där D är rätblocket $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$.

2. Undersök funktionen $f(x) = \frac{1}{3}x_1^3 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_1 x_2$ med avseende på maxima, minima och sadelpunkter.

3. (a) Beräkna ett steg av Newtons metod för systemet

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_2 &= 0 \\ x_2 - x_1 &= 0 \end{aligned}$$

med startpunkt $(2, 2)$.

(b) Härled Newtons metod med hjälp av linjärisering.

(c) Skriv ned Newtons metod i Matlab. Antag att funktionen `jacobi.m` finns.

4. (a) Skriv ned svaga formuleringen av randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a\nabla u) + cu = f \quad \text{i } D, \\ u = 0 \quad \text{på } S. \end{cases}$$

(b) Lös randvärdesproblemet med upprepad integration:

$$\begin{cases} -D(xDu(x)) = 1 \quad \text{för } x \in (1, 2), \\ u(1) = 0, \quad Du(2) = 0. \end{cases}$$

Bestäm flödet vid $x = 1$.

5. (a) Parametrisera ytan $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \le z \le 1$, med hjälp av cylindriska koordinater. Bestäm ytelementet.

(b) Beräkna flödet $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$ av vektorfältet $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ ut ur området D: $x^2 + y^2 \le z^2$, $0 \le z \le 1$. (Använd ej divergenssatsen här.)

6. Beräkna flödet i uppgift 5 (b) med hjälp av divergenssatsen.

7. (a) Härled värmeledningsekvationen

$$-\nabla \cdot (a\nabla u) = f \quad \text{i } D.$$

(b) Låt r, θ vara polära koordinater i planet. Antag att funktionen u beror bara på r, $u = u(r)$. Visa att

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

8. (a) Visa att

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$$

(b) Formulera och bevisa en partialintegrationsformel för flervariabelfunktioner.

Extra uppgift.

Vi ska ställa upp ett randvärdesproblem för värmeledning i kuben D som ges av att $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

Det finns inga värmekällor i kroppen eller på randen. Värmeledningskoefficienten är 14 J/(m s K). Randen har ett isolerande skikt med värmeöverföringskoefficienten 7 J/(m2 s K). Omgivningens temperatur är 20 K.

(a) Skriv ned randvillkoret på den del av randen som ges av att $0 \leq x \leq 1$, $y = 0$, $0 \leq z \leq 1$.

(b) Vilken typ av randvillkor är detta i PDE Toolbox?

`/stig`

MVE255+TMV191 Flervariabelanalys M, TD, Övningstentamen, 2010–11. Svar.

Obs: följande är endast svar eller kortfattade lösningar. De är inte tillräckligt utförliga för att ge full poäng.

1.

$$\frac{1}{12}((a+b)^3 - a^3 - b^3)c^2$$

2.

$$f'(x)^T = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_2 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x = (0,0)$ och $x = (1,1)$

$$f''(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$f''(0,0)$ har egenvärdena $(1 \pm \sqrt{5})/2$, olika tecken, sadelpunkt.
$f''(1,1)$ har egenvärdena $(3 \pm \sqrt{5})/2 > 0$, minimipunkt.

3.

$$b = -f(2,2) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad A = f'(2,2) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Ah = b \quad \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad h = \begin{bmatrix} -2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$$

$$x = x_0 + h = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$

(b)

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)h = 0, \quad f'(x_0)h = -f(x_0), \quad x = x_0 + h$$

(c)

```
function x = newton(f,x0,tol)

x = x0;
h = tol + 1;

while norm(h)>tol
   A = jacobi(f,x);      % evaluate the Jacobian A=Df(x)
   b = -f(x);            % evaluate the residual b=-f(x)
   h = A\b;              % solve the linearized equation
   x = x + h;            % update
end
```

4. (a) Multiplicera med testfunktion v med $v = 0$ på S och integrera partiellt. Svaga formen blir: finn u sådan att $u = 0$ på S och

$$\iiint_D (a\nabla u \cdot \nabla v + cuv)\,\mathrm{d}V = \iiint_D fv\,\mathrm{d}V$$

för alla testfunktioner v med $v = 0$ på S.

(b)

$$u(x) = -x + 2\ln(x) + 1,$$

Flödestätheten $F(x) = -xDu(x) = x - 2$, $F(1) = -1$.

5. (a)

$$\begin{cases} x = z\cos(\theta), \\ y = z\sin(\theta), \qquad 0 \le \theta < 2\pi,\ 0 \le z \le 1. \\ z = z, \end{cases}$$

Tangenter:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -z\sin(\theta)\mathbf{i} + z\cos(\theta)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \cos(\theta)\mathbf{i} + \sin(\theta)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

En normalvektor:

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = z\cos(\theta)\mathbf{i} + z\sin(\theta)\mathbf{j} - z\mathbf{k} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$$

Ytelementet:

$$\mathrm{d}S = |\mathbf{N}|\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \sqrt{2}z\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

(b) På den buktiga delen S_1 av ytan, enligt ovan (vi ser att $\mathbf{N}$ pekar utåt):

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}|\mathbf{N}|\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \mathbf{N}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k})\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

så att

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{r} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{S_1} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k})\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \iint_{S_1} 0\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = 0$$

På toppytan S_2:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta), \\ y = r\sin(\theta), \qquad 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta < 2\pi, \\ z = 1, \end{cases}$$

$$\mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,\ \hat{\mathbf{N}} = \mathbf{k},\ \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = 1$$

så att

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S = \iint_{S_2} \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \pi$$

Alltså:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \pi$$

6.

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 3$$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \,\mathrm{d}V = 3 \iiint_D \mathrm{d}V = 3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^z r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}z$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \int_0^z r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}z = 6\pi \int_0^1 \frac{z^2}{2} \,\mathrm{d}z = \pi$$

7. (a) Se FEM2.
(b) Adams 12.5, exempel 10.

8. (a) Adams 16.2, Sats 3.
(b) Se FEM2:

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\phi \,\mathrm{d}V = \iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F}\phi \,\mathrm{d}S - \iiint_D \mathbf{F} \cdot \nabla\phi \,\mathrm{d}V$$

Extra uppgift. (a) Svar:

$$-14 \frac{\partial u(x, 0, z)}{\partial y} + 7(u(x, 0, z) - 20) = 0$$

(b) Neumann. (Men kallas Robin i FEM2.)

`/stig`