Matematik Chalmers

Tentamen i MVE255 Matematisk analys i flera variabler M, 2012 övningstenta

Telefon:
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Varje uppgift är värd 6 poäng, om inte annat anges, totalt 50 poäng. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng!

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost.

---

1. Varje deluppgift är värd 2 poäng.

(a) Beräkna längden av kurvan $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\sin t\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$, $t \in [0, 2\pi]$.

(b) Skriv ned en ekvation för tangenplanet till ytan $z = x^2 + y^2$ i punkten $(1, 1, 2)$.

(c) Beräkna den linjära approximationen till $f(x) = \begin{bmatrix} x_1\cos(x_2) \\ x_1\sin(x_2) \end{bmatrix}$ kring punkten $(1, 0)$.

(d) Beskriv hur man plottar kurvan i uppgift 1 (a) med Matlab.

2. Beräkna massan av den triangulära plana skiva som har hörnen $(0, 0)$, $(0, 3L)$ och $(2L, 3L)$ och som har masstätheten $\delta(x, y) = \dfrac{k}{L}(2x + y)$. Här är konstanterna L `[m]` en längd och k en masstäthet $[\mathtt{kg/m}^2]$.

3. (a) Skriv ned finita elementbasfunktionerna ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 för ett nät som består av en enda triangel T med hörnen (noderna) $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$, $P_3 = (1, 1)$. (2 p)

(b) Matrisen A med elementen $a_{ij} = \iint_T \nabla\phi_i(x, y) \cdot \nabla\phi_j(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ kallas *styvhetsmatrisen*. Beräkna matrisen A. (4 p)

Tips: basfunktionerna är av formen $\phi(x, y) = a + bx + cy$ och lika med 1 en av noderna och 0 i de övriga.

4. (a) Härled Newtons metod för system av ekvationer $f(x) = 0$ där $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Skriv ned algoritmen som en Matlab funktionsfil `newton.m`.

(b) Hitta på ett exempel med 2 ekvationer som man kan använda för att testa programmet `newton.m`. Beskriv hur man gör, inklusive eventuella m-filer och kommandorader som behövs.

5. Beräkna integralen $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$ med vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ och kurvan $C : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $t \in [0, 1]$.

6. Beräkna utflödet av vektorfältet $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ genom sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

7. (a) Undersök funktionen $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$ med avseende på lokala extrempunkter. (Du måste beräkna egenvärdena till Hesse-matrisen för full poäng.)

(b) Beskriv hur man löser uppgift (a) med Matlab.

8. Bevisa partialintegrationsformeln

$$\iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\phi\,\mathrm{d}V = \iint_S \hat{\mathbf{N}}\cdot\mathbf{F}\phi\,\mathrm{d}S - \iiint_D \mathbf{F}\cdot\nabla\phi\,\mathrm{d}V$$

/stig

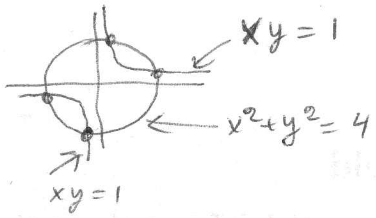
Övningstenta 2012

Svar på de nya uppgifterna. De övriga är som 2012-01-11.

1(d)
```
>> a=1, b=2
>> t = linspace(0, 2*pi);
>> x = a*cos(t);
>> y = a*sin(t);
>> z = b*t;
>> plot3(x,y,z)
```

4(a) Se häftet "Jacobi och Newton".

(b) $\begin{cases} xy-1=0 \\ x^2+y^2-4=0 \end{cases}$



Fyra rötter.

Filen funk.m:
```
function y = funk(x)
   y = [ x(1)*x(2)-1 ; x(1)^2+x(2)^2-4];
```
```
>> x0 = [1;1], tol = 1e-6
>> x = newton(@funk, x0, tol)
```

7(b) filen funk1.m
```
function y = funk1(x)
   y = -x(1)^3 + 4*x(1)*x(2) - 2*x(2)^2+1;
```

filen gradfunk1.m
```
function g = gradfunk1(x)
   g = jacobi(@funk1, x);
   g = g';
```
```
>> x = newton(@gradfunk1, x, 1e-6)
>> H = jacobi(@gradfunk1, x); eig(H)
```