

FEM1: Randvärdesproblem och finita elementmetoden i en variabel.

1

Inledning

Vi ska lösa *partiella differentialekvationer* (PDE), dvs ekvationer som innehåller partiella derivator av den okända flervariabelfunktionen $u = u(x, y, z)$. Till exempel, Laplaces ekvation,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

och Poissons ekvation,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z).$$

Jämför *ordinär differentialekvation* (ODE) från läsperiod 2 som innehåller ordinära derivator av en okänd envariabelfunktion, till exempel,

$$u'(t) = f(t, u(t)).$$

En PDE ställs upp i ett område i rummet, $D \subset \mathbf{R}^3$, eller i planet, $D \subset \mathbf{R}^2$. För att lösningen ska vara unik behöver vi ge *randvillkor* på randen $S = \partial D$ till området D , till exempel,

$$u = 0 \quad \text{på } S.$$

Vi har då ett *randvärdesproblem*.

Man kan också studera tidsberoende PDE, till exempel, värmeledningsekvationen,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

och vågekvationen,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

PDE uppträder inom många områden: värmeledning, diffusion, hållfasthet, vågutbredning, strömning, elektromagnetiska fält, kvantmekanik och så vidare. Trots olika bakgrund har dessa PDE väsentligen samma matematiska form. Observera, till exempel, att Laplace-operatorn

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

ingår i samtliga exempel ovan.

Vi löser PDE numeriskt med *finita elementmetoden* (FEM). Denna metod är ett mycket viktigt verktyg för maskiningenjören. Metoden utvecklades på 1950-talet av maskiningenjörer för hållfasthetsberäkningar. FEM bygger på en omskrivning av randvärdesproblemet till en så kallad *svag formulering*.

För enkelhets skull börjar vi med att studera randvärdesproblem och FEM i en variabel, dvs $u = u(x)$, $x \in I \subset \mathbf{R}$.

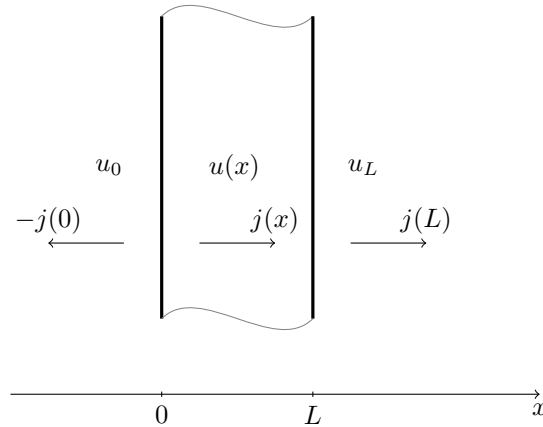
Vi anger SI-enheter inom klammer, till exempel, [K] för temperatur i Kelvin, [m] för längd i meter, [J] för energi i Joule.

¹2 april 2014, Stig Larsson, Matematiska vetenskaper, Chalmers tekniska högskola

1.1 Randvärdesproblem i en variabel

1.1.1 Värmeledningsekvationen

Temperaturen $u(x)$ [K] vid tvärsnittet x [m] i en platta med tjockleken L [m], se Figur 1, ges av differentialekvationen



Figur 1: Värmeledning i en platta.

$$(1) \quad D(-a(x)Du(x)) = f(x), \quad x \in I = (0, L).$$

Här är

- $D = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\text{m}} \right]$ derivata;
- $f(x) \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{s}} \right]$ värmekälltäthet;
- $u(x)$ [K] temperatur;
- $a(x) \left[\frac{\text{J}}{\text{m K s}} \right]$ värmeledningskoefficient;
- $j(x) = -a(x)Du(x) \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{s}} \right]$ värmeflödestäthet i x -riktningen (Fouriers lag).

Vi antar här att inga kvantiteter beror av koordinaterna y och z . Samma ekvation kan också beskriva värmeledning i en smal stång av längden L .

Dimensionskontroll: Kontrollera att enheterna i vänster- och högerled stämmer i differentialekvationen i (1).

1.1.2 Randvillkor

Vid $x = L$ gäller att värmeflödestätheten i *utåtriktningen* är proportionell mot temperaturskillnaden:

$$(2) \quad j(L) = k_L(u(L) - u_L),$$

där

- u_L [K] är den omgivande temperaturen;
- $u(L)$ [K] är temperaturen på insidan av ytan;
- $k_L \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{K s}} \right]$ en värmeöverföringskoefficient.

Å andra sidan är ju flödestätheten enligt Fouriers lag:

$$j(L) = -a(L) Du(L).$$

Alltså:

$$-a(L) Du(L) = k_L (u(L) - u_L),$$

dvs

$$a Du + k_L (u - u_L) = 0 \quad \text{för } x = L.$$

Vid $x = 0$ är värmefflödestätheten i *utåtriktningen*

$$(3) \quad -j(0) = k_0 (u(0) - u_0),$$

eftersom $-j(0)$ är flödestätheten i $-x$ -riktningen (utåt). Men vi har även $j(0) = -a(0) Du(0)$. Alltså:

$$-a(0) Du(0) = k_0 (u(0) - u_0).$$

Sammanfattningsvis kan vi skriva:

$$(4) \quad a D_N u + k(u - u_A) = 0 \quad \text{för } x = 0, L.$$

Här är u_A den omgivande temperaturen (*ambient temperature*), dvs $u_A = u_0$ respektive $u_A = u_L$, koefficienten $k = k_0$ respektive $k = k_L$, och D_N riktningsderivatan i utåtriktningen (i den utåtriktade normalens riktning), dvs

$$D_N = -\frac{d}{dx} \text{ i } x = 0, \quad D_N = \frac{d}{dx} \text{ i } x = L.$$

Koefficienten k anger hur väl isolerad ändpunkten är.

Specialfall 1: $k = \infty$, ingen isolering. Om vi dividerar med k ,

$$\frac{1}{k} a D_N u + u - u_A = 0,$$

och låter $k \rightarrow \infty$ får vi $0 + u - u_A = 0$, dvs

$$u = u_A \quad \text{i } x = 0 \text{ eller } x = L.$$

Detta randvillkor innebär att den aktuella ändpunkten, $x = 0$ eller $x = L$, inte är isolerad. Temperaturen är densamma på insidan och på utsidan av randytan.

Specialfall 2: $k = 0$, perfekt isolering. Med $k = 0$ får vi

$$a D_N u = 0,$$

dvs inget värmefflöde genom den aktuella ändpunkten. Eftersom $a > 0$ kan detta förenklas till

$$D_N u = 0 \quad \text{i } x = 0 \text{ eller } x = L.$$

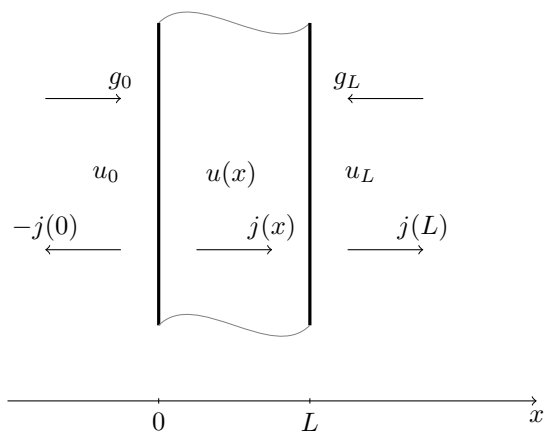
1.1.3 Randvärdesproblem

Genom att sätta samman (1) och (4) får vi ett randvärdesproblem.

Randvärdesproblem. Finn $u = u(x)$ sådan att

$$(5) \quad \begin{aligned} -D(a Du) &= f & \text{för } x \in I = (0, L), \\ a D_N u + k(u - u_A) &= g & \text{för } x = 0, L. \end{aligned}$$

Här har vi lagt till ett föreskrivet *inflöde* av värme med flödestätheten g , där $g = g_0$ respektive $g = g_L$, se Figur 2. Detta görs genom att lägga till termerna $-g_L$ respektive $-g_0$ i (2) och (3).



Figur 2: Värmeledning i en platta (med inflöde på randen).

Randvärdesproblemet kan i princip lösas genom att integrera differentialekvationen två gånger och bestämma de två integrationskonstanterna med hjälp av de två randvillkoren. Oftast blir det omöjliga räkningar. Därför ska vi använda FEM!

Exempel 1.1. Ett enkelt exempel:

$$\begin{cases} -D(5Du) = 0, & \text{i } I = (0, 1), \\ -5Du(0) + 3(u(0) - 2) = 0, & \text{(isolering)} \\ u(1) = 0. & \text{(ingen isolering)} \end{cases}$$

Här är $a = 5$, $f = 0$, $L = 1$, $k_0 = 3$, $u_0 = 2$, $g_0 = 0$, $k_1 = \infty$, $u_1 = 0$, $g_1 = 0$.

Integrera två gånger:

$$\begin{aligned} -5Du(x) &= C_1 \\ Du(x) &= -\frac{1}{5}C_1 \\ u(x) &= -\frac{1}{5}C_1x + C_2 \end{aligned}$$

Randvillkoren ger:

$$\begin{aligned} 0 &= -5Du(0) + 3(u(0) - 2) = C_1 + 3C_2 - 6 \\ 0 &= u(1) = -\frac{1}{5}C_1 + C_2 \end{aligned}$$

Vi får ett linjärt ekvationssystem som löses med Gauss eliminationsmetod:

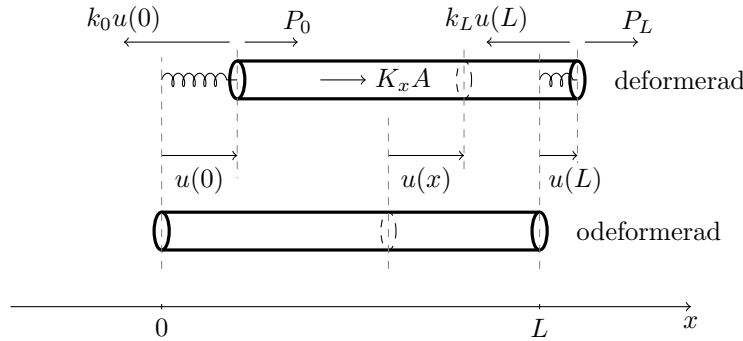
$$\begin{cases} C_1 + 3C_2 = 6, \\ -C_1 + 5C_2 = 0, \end{cases} \quad C_2 = \frac{3}{4}, \quad C_1 = \frac{15}{4}$$

Temperaturen och värmeflödestätheten blir

$$u(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}, \quad j(x) = -aDu(x) = -5Du(x) = C_1 = \frac{15}{4}$$

Observera strukturen hos ekvationerna i randvärdesproblemet (5). Även mekanikens ekvationer har denna form. Till exempel:

Stångens ekvation. För en axiellt belastad stång med fjädrande upphängning i ändpunkterna har vi följande randvärdesproblem:



Figur 3: Axiellt belastad stång.

$$(6) \quad \begin{cases} -D(EADu) = K_x A & \text{för } x \in I = (0, L), \\ EAD_N u + ku = P & \text{för } x = 0, L. \end{cases}$$

Här är

- u [m] axiell förskjutning i x -riktningen;
- $E \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$ Youngs modul, A [m²] tvärsnittsarea, EA [N] styvhet;
- $K_x \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right]$ lasttäthet, $K_x A \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$ last i x -riktningen;
- $P = P_0$ eller $P = P_L$ [N] kraft i x -riktningen;
- $k = k_0$ eller $k = k_L \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]$ fjäderkonstant;
- $\mathcal{N} = EADu$ [N] utåtriktad snittkraft.

Randvillkoren kommer från kraftbalans i ändpunkterna:

$$-\mathcal{N}(0) = P_0 - k_0 u(0), \quad \mathcal{N}(L) = P_L - k_L u(L).$$

Specialfall 1: $k = \infty$, **fast inspänd ände.** Då $k \rightarrow \infty$ får vi $u = 0$. Det betyder oändligt styv fjädring, dvs stången är fast inspänd i den aktuella ändpunkten $x = 0$ respektive $x = L$.

Specialfall 2: $k = 0$, **fri ände.** Med $k = 0$ blir randvillkoret $EA D_N u = P$. Det betyder ingen fjäderkraft, dvs den aktuella ändpunkten är fri.

Konstitutiva lagar. Ekvationen $\mathcal{N} = EA Du$ är Hookes lag. Den spelar samma roll som Fouriers lag $j = -a Du$ i värmeledning. Dessa är exempel på konstitutiva lagar som beskriver materialets egenskaper.

Observera analogin mellan värmeledning och mekanik. Till exempel:

$$\begin{aligned} a &\longleftrightarrow EA \\ j &\longleftrightarrow \mathcal{N} \\ g &\longleftrightarrow P \\ f &\longleftrightarrow K_x A \end{aligned}$$

Exempel 1.2. Vi studerar en stång med konstant styvhet som är fast inspänd i högra änden och fri i vänstra änden. Den belastas endast med en kraft i vänstra änden. Randvärdesproblemet blir

$$(7) \quad \begin{cases} -D(EA Du) = 0 & \text{för } x \in I = (0, L), \\ -EA Du(0) = P_0, \quad u(L) = 0. \end{cases}$$

Eftersom EA är konstant blir differentialekvationen $u''(x) = 0$ med allmän lösning $u(x) = Cx + D$ (integrera två gånger). Randvillkoren ger

$$P_0 = -EA u'(0) = -EAC, \quad 0 = u(L) = CL + D,$$

med lösning $C = -P_0/EA$, $D = -CL$. Alltså:

$$u(x) = \frac{P_0}{EA}(L - x).$$

Vi ser att om $P_0 > 0$ (tryckkraft) så blir $u(x) > 0$, dvs stången trycks ihop (förskjutningen är positiv, rörelse åt höger). Om $P_0 < 0$ (dragkraft) så blir $u(x) < 0$, dvs stången förlängs.

1.2 Svag formulering

Vi skriver nu om randvärdesproblemet (5) till en så kallad svag form. Vi multiplicerar differentialekvationen

$$-D(a Du) = f$$

med en funktion v och integrerar partiellt över $I = (0, L)$:

$$\begin{aligned} \int_0^L f v \, dx &= - \int_0^L D(a Du) v \, dx \\ &= - \left[a Du v \right]_0^L + \int_0^L a Du Dv \, dx \\ &= a(0) Du(0) v(0) - a(L) Du(L) v(L) + \int_0^L a Du Dv \, dx. \end{aligned}$$

Nu använder vi även randvillkoren från (5):

$$\begin{aligned} a(0) Du(0) &= k_0(u(0) - u_0) - g_0, \\ -a(L) Du(L) &= k_L(u(L) - u_L) - g_L. \end{aligned}$$

Vi får

$$\int_0^L f v \, dx = \left(k_0(u(0) - u_0) - g_0\right)v(0) + \left(k_L(u(L) - u_L) - g_L\right)v(L) + \int_0^L a \, Du \, Dv \, dx.$$

Vi samlar termer med den obekanta funktionen u i vänsterledet:

$$\begin{aligned} \int_0^L a \, Du \, Dv \, dx + k_0 u(0)v(0) + k_L u(L)v(L) \\ = \int_0^L f v \, dx + (k_0 u_0 + g_0)v(0) + (k_L u_L + g_L)v(L). \end{aligned}$$

Denna ekvation ska vara uppfylld för alla val av funktionen v . Den godtyckliga funktionen v kallas *testfunktion*. Denna ekvivalenta formulering av randvärdesproblemet kallas *den svaga formuleringen*. Den är grunden för finita elementmetoden.

Den svaga formuleringen. Finn en funktion $u = u(x)$ sådan att ekvationen

$$(8) \quad \begin{aligned} \int_0^L a \, Du \, Dv \, dx + k_0 u(0)v(0) + k_L u(L)v(L) \\ = \int_0^L f v \, dx + (k_0 u_0 + g_0)v(0) + (k_L u_L + g_L)v(L) \end{aligned}$$

är uppfylld för alla testfunktioner v .

(För att formuleringen ska vara helt korrekt måste man även ange vilka funktionsklasser u och v ska tillhöra. Vi gör inte det.)

Randvillkoret $u = u_A$ ($k = \infty$) är lite speciellt. Då måste man välja testfunktionerna med $v = 0$ i den ändpunkt där randvillkoret $u = u_A$ gäller. Då blir motsvarande term $v(0) = 0$ och/eller $v(L) = 0$ i (8). Vi illustrerar detta i två exempel.

Exempel 1.3. Vi skriver ned den svaga formuleringen av Exempel 1.2. Där har vi randvillkoren $-EA Du(0) = P_0$, $u(L) = 0$. Vi ska alltså använda testfunktioner med $v(L) = 0$. Dessutom har vi $k_0 = 0$ och ingen kraft, $K_x A = 0$, vilket motsvarar $f = 0$ i (8). Den svaga formuleringen av (7) blir: Finn en funktion $u = u(x)$ med $u(L) = 0$ och sådan att ekvationen

$$\int_0^L EA \, Du \, Dv \, dx = P_0 v(0)$$

är uppfylld för alla testfunktioner v med $v(L) = 0$.

Vi kontrollerar att lösningen $u(x) = \frac{P_0}{EA}(L-x)$ uppfyller den svaga ekvationen. Vi har $EA \, Du = -P_0$ så att

$$\int_0^L EA \, Du \, Dv \, dx = -P_0 \int_0^L Dv \, dx = -P_0(v(L) - v(0)) = P_0 v(0)$$

för alla v med $v(L) = 0$.

Exempel 1.4.

$$\begin{cases} -D((1+x^2)Du) = 1 & \text{i } (-1, 1), \\ u(-1) = 0, \quad Du(1) = 0. \end{cases}$$

- Skriv ned den svaga formuleringen.
- Lös problemet genom att integrera två gånger.

Lösning. (a) Randvillkoret $u(-1) = 0$ kräver att vi använder testfunktionen v sådan att $v(-1) = 0$. Vi multiplicerar med v och integrerar:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 v \, dx &= - \int_{-1}^1 D((1+x^2) Du) v \, dx \quad \left\{ \text{partiell integration} \right\} \\ &= - \left[(1+x^2) Du(x) v(x) \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 (1+x^2) Du \, Dv \, dx \\ &= -2 \underbrace{Du(1)}_{=0} v(1) + 2 Du(-1) \underbrace{v(-1)}_{=0} + \int_{-1}^1 (1+x^2) Du \, Dv \, dx \\ &= \int_{-1}^1 (1+x^2) Du \, Dv \, dx.\end{aligned}$$

Den svaga formuleringen är: Finn $u = u(x)$ sådan att $u(-1) = 0$ och

$$\int_{-1}^1 (1+x^2) Du \, Dv \, dx = \int_{-1}^1 v \, dx \quad \text{för alla } v \text{ med } v(-1) = 0.$$

(b) Differentialekvationen är

$$D((1+x^2) Du) = -1$$

Vi integrerar:

$$\begin{aligned}(1+x^2) Du &= -x + C, \\ Du(x) &= -\frac{x}{1+x^2} + \frac{C}{1+x^2}, \\ u(x) &= -\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \arctan(x) + D.\end{aligned}$$

Randvillkoren ger:

$$\begin{aligned}0 = u(-1) &= -\frac{1}{2} \ln(2) + C \arctan(-1) + D = -\frac{1}{2} \ln(2) - C \frac{\pi}{4} + D, \\ 0 = Du(1) &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} C.\end{aligned}$$

Vi får $C = 1$, $D = \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{\pi}{4}$. Lösningen är

$$\begin{aligned}u(x) &= -\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \arctan(x) + \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{\pi}{4} \\ &= \ln \left(\sqrt{\frac{2}{1+x^2}} \right) + \arctan(x) + \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

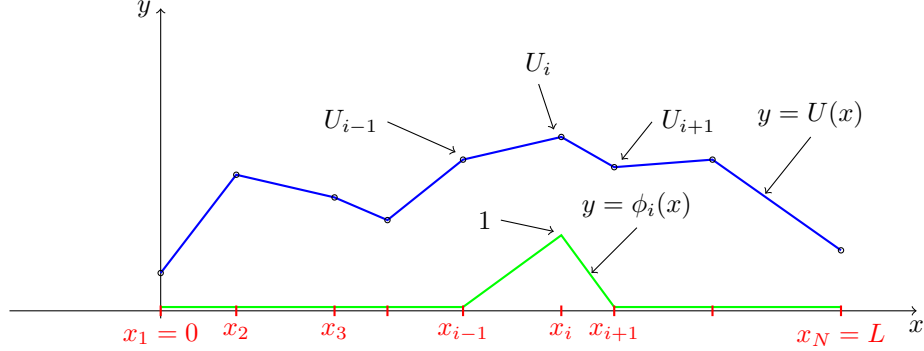
Du bör lära dig att bestämma den svaga formuleringen för randvärdesproblem med olika kombinationer av randvillkor samt att lösa *enkla* randvärdesproblem genom att integrera två gånger, se övningarna i slutet av detta häfte. Men det viktigaste är att kunna lösa *allmänna* randvärdesproblem med finita elementmetoden.

1.3 Finita elementmetoden i 1-D

(Finita elementmetoden kallas "finite element method" på engelska, uttalas "fajnajt". Nedan anger vi inom parentes vad vissa viktiga begrepp heter på engelska.)

Vi ska beräkna en approximativ lösning $U(x)$, som är en *styckvis linjär funktion*. Vi inför ett beräkningsnät (*mesh*) i intervallet $I = (0, L)$:

$$0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_N = L.$$



Figur 4: En styckvis linjär funktion $y = U(x)$ och en basfunktion $y = \phi_i(x)$.

Obs: vi använder "MATLAB-numrering" som börjar med 1. Vi har alltså N punkter (kallas även noder) x_i och $N - 1$ intervall $I_i = (x_i, x_{i+1})$ av längd $h_i = x_{i+1} - x_i$. Se Figur 4.

En kontinuerlig styckvis linjär funktion $U(x)$ är entydigt bestämd av sina nodvärden $U_i = U(x_i)$. För att beskriva $U(x)$ inför vi *basfunktionerna* $\phi_i(x)$, en för varje nod x_i . Funktionerna $\phi_i(x)$ bestäms av att de är kontinuerliga, styckvis linjära, samt att

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{om } i = j, \\ 0, & \text{om } i \neq j. \end{cases}$$

Se Figur 4. Funktionen $U(x)$ kan nu skrivas som en linjär kombination av basfunktionerna:

$$U(x) = \sum_{i=1}^N U_i \phi_i(x), \quad \text{med koefficienterna } U_i = U(x_i).$$

Obs att

$$U(x_j) = \sum_{i=1}^N U_i \phi_i(x_j) = U_j$$

eftersom $\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$ innebär att endast en term (med $i = j$) blir kvar i summan.

Vi har nu en formel som uttrycker $U(x)$ med hjälp av nodvärdena. Vi ska nu bestämma de okända nodvärdena U_i så att $U(x)$ blir en approximativ lösning till randvärdesproblemet (5). Vi använder den svaga formuleringen i (8). För att det inte ska bli så mycket att skriva genomför vi detta i fallet då $k_0 = k_L = 0$, $g_0 = g_L = 0$:

$$(9) \quad \int_0^L a \, D u \, D v \, dx = \int_0^L f v \, dx \quad \text{för alla } v.$$

Istället för $u(x)$ sätter vi in ansatsen $U(x) = \sum_{i=1}^N U_i \phi_i(x)$ och vi väljer testfunktionerna $v = \phi_j$. Vi får

$$\sum_{i=1}^N U_i \int_0^L a \, D \phi_i \, D \phi_j \, dx = \int_0^L f \phi_j \, dx, \quad j = 1, \dots, N.$$

Med beteckningarna

$$a_{ij} = a_{ji} = \int_0^L a \, D \phi_i \, D \phi_j \, dx, \quad b_j = \int_0^L f \phi_j \, dx,$$

blir detta

$$\sum_{i=1}^N a_{ji} U_i = b_j, \quad j = 1, \dots, N,$$

dvs på matrisform:

$$\mathcal{A} \mathcal{U} = b.$$

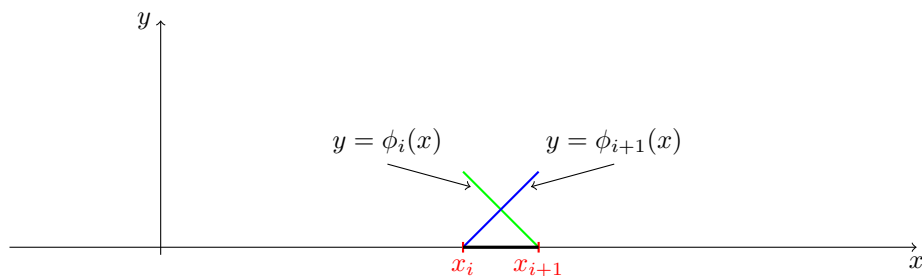
Detta är ett linjärt ekvationssystem av N ekvationer för N obekanta. Matrisen

$$\mathcal{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^N = \left\{ \int_0^L a D\phi_i D\phi_j dx \right\}_{i,j=1}^N$$

kallas *styvhetmatris* (*stiffness matrix*). Jämför med stångens ekvation, där $a = EA$ är materialets styvhet. Styvhetsmatrisen är *symmetrisk*, $a_{ji} = a_{ij}$, och *tridiagonal*,

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} * & * & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & \ddots & \vdots \\ 0 & * & * & * & 0 \\ \vdots & \ddots & * & * & * \\ 0 & \dots & 0 & * & * \end{bmatrix},$$

dvs $a_{ij} = 0$ utom då $j = i-1, i, i+1$. Vektorn $b = \{b_j\}_{j=1}^N = \{\int_0^L f \phi_j dx\}_{j=1}^N$ kallas *lastvektor* (*load vector*). Intervallet $I_i = (x_i, x_{i+1})$ tillsammans med sina två basfunktioner ϕ_i, ϕ_{i+1} kallas ett *finit element*.



Figur 5: Ett finit element.

Ekvationssystemet $\mathcal{A} \mathcal{U} = b$ kan enkelt ställas upp och lösas med hjälp av ett datorprogram, till exempel, `MyPoissonSolver.m` i Datorövning 4.

Programmet löser mer allmänna randvärdesproblem av formen

$$\begin{cases} -D(a Du) + d Du + cu = f & \text{för } x \in I = (0, L), \\ a D_N u + k(u - u_A) = g & \text{för } x = 0, L. \end{cases}$$

Här har vi även en *konvektionsterm* $d Du$ och en *reaktionsterm* cu .

Randvillkor av typen $u = u_A$ hanteras i detta program approximativt genom att man sätter k lika med ett stort tal, till exempel, $k = 10^8$.

Problem

Bestäm svaga formuleringar för följande randvärdesproblem 1.1–1.3.

Problem 1.1. (Stång)

$$\begin{cases} -D(EADu) = K_x A & \text{i } (0, L), \\ u(0) = 0, & EADu(L) = P. \end{cases}$$

Tips: $v(0) = 0$.

Problem 1.2.

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{i } (0, L), \\ -u'(0) + u(0) = g_0, & u(L) = 0. \end{cases}$$

Tips: $v(L) = 0$.

Problem 1.3. (Fritt upplagd balk)

$$\begin{cases} D^2(EID^2w) = q & \text{i } (0, L), \\ w(0) = 0, & w(L) = 0, \\ D^2w(0) = 0, & D^2w(L) = 0. \end{cases}$$

Här är w [m] utböjning, $I = I_y$ [m⁴] tvärsnittets tröghetsmoment med avseende på y -axeln, EI [Nm²] böjstyvhet och q $\begin{bmatrix} \text{N} \\ \text{m} \end{bmatrix}$ lasttätthet i z -riktningen (uppåt). Vridmomentet med avseende på y -axeln är $M = -EID^2w$ [Nm]. Tips: $v(0) = 0$, $v(L) = 0$. Integrera partiellt två gånger.

Lös följande randvärdesproblem genom upprepad integration.

Problem 1.4.

$$\begin{cases} -u'' = 1 & \text{i } (0, 1), \\ u(0) = 0, & u(1) = 0. \end{cases}$$

Problem 1.5.

$$\begin{cases} -D((1+x)Du) = 2x & \text{i } (0, 1), \\ -Du(0) + u(0) = 0, & u(1) = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Problem 1.6.

$$\begin{cases} -D(aDu) = 0 & \text{i } (0, L) \text{ med konstant } a > 0, \\ u(0) = u_0, & u(L) = u_L. \end{cases}$$

Beräkna även värmeflödestätheten $j = -aDu$.

Problem 1.7. (Fritt upplagd balk)

$$\begin{cases} D^2(EID^2w) = q & \text{i } (0, L) \text{ med } EI \text{ och } q \text{ konstanta} \\ w(0) = 0, & w(L) = 0, \\ D^2w(0) = 0, & D^2w(L) = 0. \end{cases}$$

Problem 1.8.

$$\begin{cases} -au'' + u' = 1 & \text{i } (0, 1) \text{ med konstant } a > 0, \\ u(0) = 0, & u(1) = 0. \end{cases}$$

Svar och lösningar

1.1. Finn $u = u(x)$ sådan att $u(0) = 0$ och

$$\int_0^L EA u' v' dx = \int_0^L K_x A v dx + P v(L) \quad \text{för alla } v \text{ med } v(0) = 0.$$

1.2. Finn $u = u(x)$ sådan att $u(L) = 0$ och

$$\int_0^L u' v' dx + u(0)v(0) = \int_0^L f v dx + g_0 v(0) \quad \text{för alla } v \text{ med } v(L) = 0.$$

1.3. Finn $w = w(x)$ sådan att $w(0) = w(L) = 0$ och

$$\int_0^L EI w'' v'' dx = \int_0^L q v dx \quad \text{för alla } v \text{ med } v(0) = v(L) = 0.$$

1.4. $u(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$

1.5. $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$

1.6. $u(x) = (u_L - u_0)\frac{x}{L} + u_0$, $j = -aj'(x) = a(u_0 - u_L)\frac{1}{L}$. Obs att flödestätheten är konstant och proportionell mot temperaturskillnaden.

1.7. $w(x) = \frac{1}{24} \frac{qL^4}{EI} \left(\left(\frac{x}{L} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \frac{x}{L} \right)$

1.8. En integration ger $u' - \frac{1}{a}u = -\frac{1}{a}(x + C)$. Multiplicera med den integrerande faktorn $e^{-x/a}$ och integrera igen. Lösningen blir $u(x) = x - (e^{x/a} - 1)/(e^{1/a} - 1)$. Plotta med Matlab för några olika värden på a :

```
>>  
>> a=1; fplot(@(x) x-(exp(x/a)-1)/(exp(1/a)-1),[0,1]), hold on  
>> a=.1; fplot(@(x) x-(exp(x/a)-1)/(exp(1/a)-1),[0,1]), hold on  
>>
```

/stig