

MVE 255

Matematisk analys i flera variabler

Föreläsare: Stig Larsson

Vikarie: Anders Logg (lv 1)

* Praktisk information

- Kurshemsida: Google "mve 255"
- 3 föreläs. / vecka
- 2 örnningar / vecka
- 1 datorövning / vecka (5 st)
- skriftlig tenta
- 3 duggor i Maple TA kan ge 6 bonusp.

* Kurslitteratur:

- Kolund, Lindström, Hreberg
Kap 2, 3, 5, 6
- Anteckningar / kompendium (Stig)

* Idag: Introduktion

Fö 1Funktioner $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Gränsvärde

Kontinuitet

Lipschitz-kontinuitet

Kursbok: avsnitt 2.1-2.3

* Introduktion

Vi har tidigare studerat:

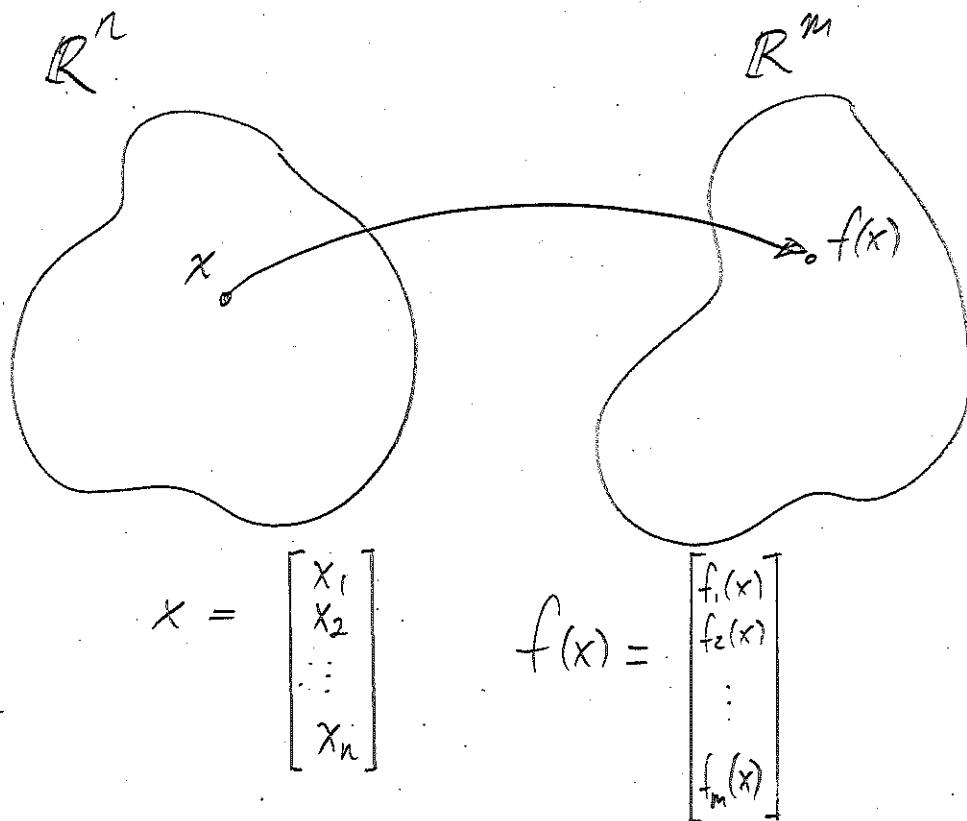
- Funktioner $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- Gränsvärde ($\epsilon - \delta$)
- Kontinuitet
- Lipschitz-kontinuitet
- Fixpunktsiteration
- Derivata
- Newtons metod
- Integral
- Differentialekvationer

Vi kommer ej
att utvidga
bisektion!

Vi kommer i denna kurs att utvidga allt detta till $\mathbb{R}^n$!

Flervariabelanalys är studiet av funktioner

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$



- Notera skrivsättet

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

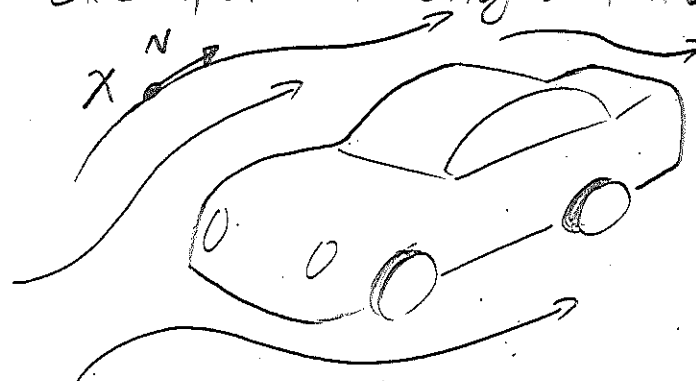
- Notera att varje komponent f_i beror (potentiellt) av varje komponent x_j .

- Exempel:

$$f(x) = \begin{bmatrix} \sin(x_1) \cdot \cos(x_2) \\ x_1 + x_2 \\ e^{x_1} \cdot \ln x_2 \end{bmatrix}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

- Exempel: Hastighetsfält



$$v(x, t) = (v_1(x, t), v_2(x, t), v_3(x, t))$$

$$v: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ alternativt } v: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

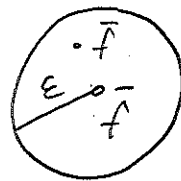
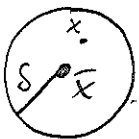
Naturliga frågor:

- Hur deriverar och integrerar
vi dessa funktioner?

* Definition: gränsvärde

Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ har
gränsvärdet $\bar{f} \in \mathbb{R}^m$ i punkten $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$
om

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \underbrace{0 < |x - \bar{x}| < \delta}_{x \in B_\delta(\bar{x})} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - \bar{f}| < \varepsilon}_{f(x) \in B_\varepsilon(\bar{f})}$$



Notera:

- Samma definition som i lp 1!
- $|x - \bar{x}| = \left(\sum_{j=1}^n |x_j - \bar{x}_j|^2 \right)^{1/2}$ (till exempel)

* Sats: Räkne regler för gränsvärden

$$\text{Om } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \bar{f} \\ \lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x) = \bar{g} \end{cases}$$

Så gäller att

$$1. \lim_{x \rightarrow \bar{x}} [f(x) + g(x)] = \bar{f} + \bar{g}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \bar{x}} [f(x) - g(x)] = \bar{f} - \bar{g}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \bar{x}} [f(x) \cdot g(x)] = \bar{f} \cdot \bar{g}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \bar{x}} [\alpha f(x)] = \alpha \bar{f}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Beweis: För 1, 2, 4 - se läsperiod 1, Fö 7!

Bevis av (3):

$$|\bar{f} \cdot \bar{g} - f(x) \cdot g(x)| = |\bar{f} \cdot \bar{g} - f(x) \cdot \bar{g} + f(x) \cdot \bar{g} - f(x) \cdot g(x)|$$

$$\leq |\bar{f} \cdot \bar{g} - f(x) \cdot \bar{g}| + |f(x) \cdot \bar{g} - f(x) \cdot g(x)|$$

$$= |(\bar{f} - f(x)) \cdot \bar{g}| + |f(x) \cdot (\bar{g} - g(x))|$$

$$\leq |\bar{f} - f(x)| \cdot |\bar{g}| + |f(x)| \cdot |\bar{g} - g(x)|$$

$$< \varepsilon/2 + |f(x)| \cdot |\bar{g} - g(x)|$$

$$< \varepsilon/2 + (|\bar{f}| + 1) \cdot |\bar{g} - g(x)|$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \text{om } x \text{ tillräckligt nära } \bar{x}.$$

Triangel-
olikheten

Cauchy-Schwarz
olikhet

Tag x nära $\bar{x}$ så att

$$|\bar{f} - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2|\bar{g}|}$$

Tag x nära $\bar{x}$ så att

$$|f(x) - \bar{f}| < 1$$

$$|\bar{g} - g(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{2(|\bar{f}| + 1)}$$



Exempel:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x - y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x + y = 0$$

* Definition: Kontinuitet (i en punkt)

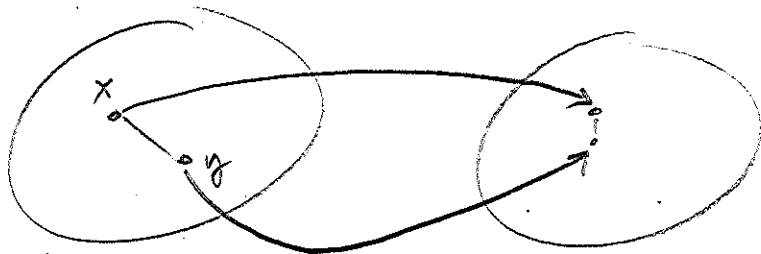
Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är kontinuerlig i punkten $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ om

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$$

* Definition: Lipschitz-kontinuitet

Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ är Lipschitz-kontinuerlig om

$$\exists L_f > 0: \|f(x) - f(y)\| \leq L_f \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

* Definition: Kontraktion

Funktionen $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ är en

kontraktion om

$$L_g < 1$$

Obs!

Samma rum!

* Sats: Egenskaper för kontinuerliga funktioner

Om f och g är kontinuerliga i $\bar{x}$ så gäller att

1. $f + g$ är kontinuerlig i $\bar{x}$
2. $f - g$ är kontinuerlig i $\bar{x}$
3. $f \cdot g$ är kontinuerlig i $\bar{x}$
4. αf är kontinuerlig i $\bar{x}$

Beris: Följer direkt från räkneregler för gränsvärden!

* Sats: Egenskaper för Lipschitz-funktioner

1. f Lipschitz $\Rightarrow f$ kontinuerlig
2. f Lipschitz $\Rightarrow f$ begränsad
3. f, g Lipschitz $\Rightarrow f+g, f-g, f \cdot g$ Lipschitz

Beris: Se läsperiod 1, Fö 10!

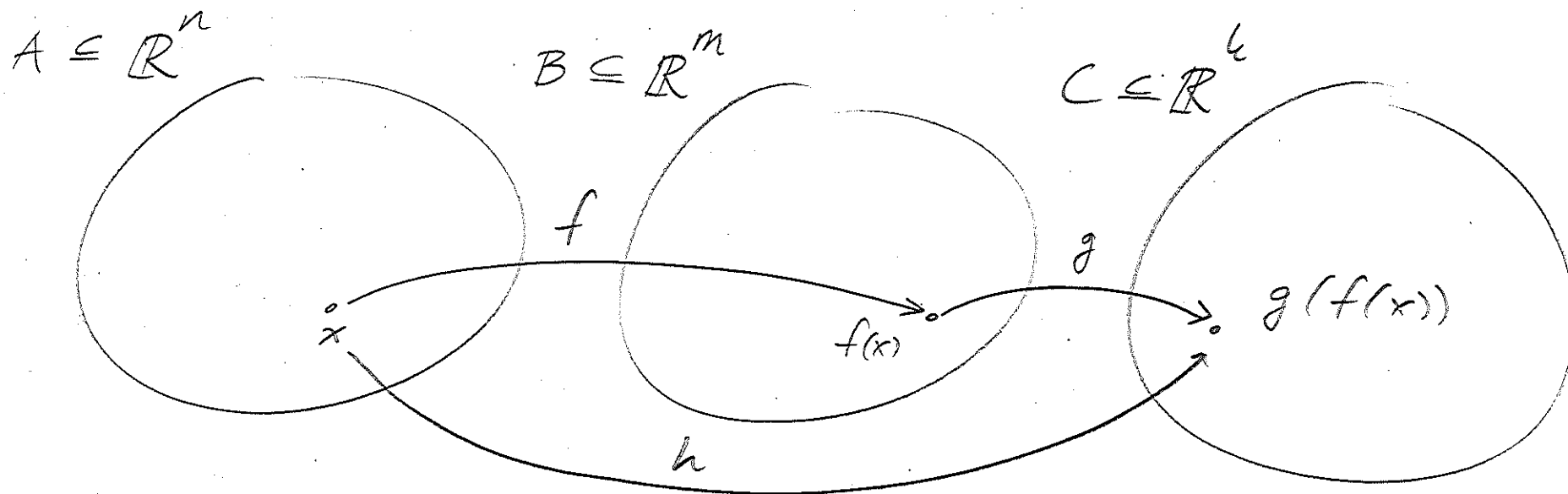
Örning: Visa att

$$f(x) = (x_1 x_2, x_1^2)$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

är Lipschitz-kontinuerlig på varje begränsad delmängd av $\mathbb{R}^2$!

* Sammansatta funktioner



$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$h = g \circ f$$

Vi kommer senare i kursen att stöta på derivatan, f', g', h'

$$f' = \begin{bmatrix} \text{grid} \end{bmatrix}_n^m \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$g' = \begin{bmatrix} \text{grid} \end{bmatrix}_m^k \in \mathbb{R}^{k \times m}$$

$$h' = \begin{bmatrix} \text{grid} \end{bmatrix}_n^k \in \mathbb{R}^{k \times n}$$

Att fundera på:
kedjeregeln och
matriserna

$$\begin{matrix} h' & g' & f' \\ k \times n & k \times m & m \times n \\ \dots \end{matrix}$$