

\* Idag: Derivata i  $\mathbb{R}^n$   
 Riktningsderivata  
 Partiell derivata  
 Gradient  
 Differentierbarhet

**Fö 2**

\* Derivata i  $\mathbb{R}^n$

För  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

För  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ :

$$f'(x) = ? \quad x+h = ?$$

Om  $x \in \mathbb{R}^n$  finns många sätt  
 att ändra på  $x$ !

Ni kommer i den här kursen att  
 stöta på många olika typer av  
 derivator:

Riktningsderivata:  $D_u f$  ( $f'(\cdot, u)$  i boken)

Partiell derivata:  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$

Gradient:

$$\nabla f$$

Rotation:

$$\nabla \times f$$

Divergens:

$$\nabla \cdot f$$

Derivata

$$Df = f'$$

Laplace

$$\Delta f$$

} Till den  
 intresserade, se  
 kap 17 i Adams  
 om den  
 "högre derivatan" d

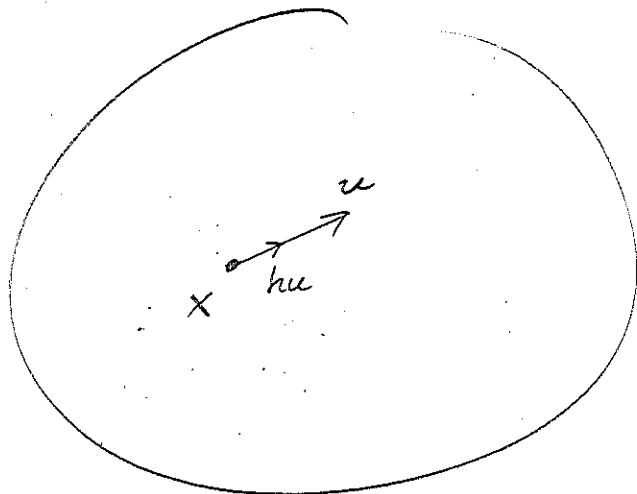
\* Definition: Riktningssderivata  
(av skalärvärd funktion)

Låt  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Låt  $u \in \mathbb{R}^n$  vara given

$$D_u f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+hu) - f(x)}{h}$$

Riktningssderivatan av  $f$  i riktningen  $u$  i punkten  $x$



Notera: - Mäter ändringen av  $f$  i riktningen  $u$   
- Olika riktningar ger olika derivator

Exempel:

$$f(x) = x_1^2 + x_1 x_2$$

$$u = (2, 1), \quad x = (1, 0)$$

Beräkna  $D_u f(x)$ !

Noterar först att

$$x + hu = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + h \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2h \\ h \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x+hu) &= (1+2h)^2 + (1+2h) \cdot h \\ &= 1 + 4h + 4h^2 + h + 2h^2 \\ &= 1 + 5h + 6h^2 \end{aligned}$$

$$f(x) = 1^2 + 1 \cdot 0 = 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow D_u f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+5h+6h^2) - 1}{h} \\ &= \underline{\underline{5}} \end{aligned}$$

Kommentar: Riktungsderivatan är definierad för godtyckliga  $u \in \mathbb{R}^n$  men används flitigast för  $|u|=1$

\* Definition: Partiell derivata

Låt  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Låt  $e^i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{plats } i}}{1}, 0, \dots, 0) = \text{enhetsvektor i}$

Då definierar vi den partiella derivatan som

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = D_{e^i} f(x),$$

dvs derivatan i den  $i$ -te koordinatriktningen

\* Beräkning av partiella derivator

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = D_{e^i} f(x)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h e^i) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, \dots, x_i + h, \dots) - f(x, \dots, x_i, \dots)}{h}$$

Vi noterar att detta sammanfaller med definitionen av vår vanliga derivata för  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  om vi betraktar  $x_j$  för  $j \neq i$  som konstanter!

Exempel:

$$1) f(x) = x_1^2 + x_1 x_2^3 + \sin(x_1 x_2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2^3 + x_2 \cos(x_1 x_2)$$

2)

$$f(x) = x_1 x_2 x_3 \dots x_n = \prod_{j=1}^n x_j$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} = \prod_{j \neq i} x_j$$

\* Definition: GradientLåt  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Antag: De partiella derivatorna existerar i punkten  $x$ .

Då definierar vi gradienten

$$\nabla f(x) \in \mathbb{R}^n$$

som

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$= \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Exempel:

$$f(x) = x_1^2 x_2 e^{x_1 x_3}$$

Bestäm gradienten i punkten  $x = (1, -2, 0)$ 

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= 2x_1 x_2 e^{x_1 x_3} + x_1^2 x_2 e^{x_1 x_3} x_3 \\ &= 2 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot 1 + 0 = -4 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1^2 e^{x_1 x_3} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1^2 x_2 e^{x_1 x_3} x_1 = 1^2 \cdot (-2) \cdot 1 \cdot 1 = -2$$

$$\Rightarrow \nabla f(x) = (-4, 1, -2)$$

Naturlig frågeställning: Vad är relationen mellan  $D_x f$ ,  $\frac{\partial}{\partial x_i} f$  och  $\nabla f$ ?

(Lunigare än man kan tro!)

$\frac{\partial}{\partial x_i} f$  och därmed  $\nabla f$  är  
 definierade från  $Du f$ , men kan  
 $Du f$  beräknas från  $\nabla f$  (alt.  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ )?

$$Du f = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+hu) - f(x)}{h}$$

Tag  $n=2$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1+hu_1, x_2+hu_2) - f(x_1, x_2)}{h}$$

Lägg till  
och dra ifrån

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1+hu_1, x_2+hu_2) - f(x_1, x_2+hu_2) + f(x_1, x_2+hu_2) - f(x_1, x_2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1+hu_1, x_2+hu_2) - f(x_1, x_2+hu_2)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2+hu_2) - f(x_1, x_2)}{h}$$

$$= u_1 \lim_{\substack{hu_1 \rightarrow 0 \\ (u_1 \neq 0)}} \frac{f(x_1+hu_1, x_2+hu_2) - f(x_1, x_2+hu_2)}{hu_1} + u_2 \lim_{\substack{hu_2 \rightarrow 0 \\ (u_2 \neq 0)}} \frac{f(x_1, x_2+hu_2) - f(x_1, x_2)}{hu_2}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot u_2 \quad (???)$$

↑  
Fungerar ibland, ibland inte!

Fungerar inte om gränsvärdet beror på  
hur vi närmar oss punkten  $x$ .

Om det fungerar kallar vi funktionen  
differentierbar i punkten  $x$ .

Då gäller alltså att

$$D_u f = \nabla f \cdot u$$

Exempel:

$$1) f(x) = x_1^2 \cdot \sin(x_2)$$

$$\Rightarrow \nabla f(x) = (2x_1 \sin(x_2), x_1^2 \cos(x_2))$$

$$\Rightarrow D_u f(x) = (2x_1 \sin(x_2), x_1^2 \cos(x_2)) \cdot u$$

$$= 2x_1 \sin(x_2) \cdot u_1 + x_1^2 \cos(x_2) \cdot u_2$$

för alla  $u$

(Hur vet man att  $f$  är differentierbar?  
Svar kommer snart!)

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2}, & x \neq (0,0) \\ 0, & x = (0,0) \end{cases}$$

$\nabla f$  existerar för  $x = (0,0)$

men  $\nabla f \cdot u \neq D_u f$  !

Se uppgift 2.4.7!

(Tag  $x_2 = x_1^2$ )

\* Sats: Egenskaper för differentierbara funktioner

1) Differentierbar  $\Rightarrow D_u f = \nabla f \cdot u$

2) Differentierbar  $\Rightarrow$  kontinuerlig

3) Partiella derivatorna kontinuerliga  $\Rightarrow$  differentierbar

Beweis: Se boken

Notera: Från 3) kan vi enkelt säga att funktionen i första exemplet är differentierbar!

\* Sats: Om gradienten

Om  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  är differentierbar  
 så pekar  $\nabla f$  i den riktning som  
 $f$  växer snabbast.

Bervis:

$$D_u f = \nabla f \cdot u = \cos \theta \cdot |\nabla f| \cdot |u|$$

Som störst då  $u$  pekar i samma  
 riktning som  $\nabla f$

$\Rightarrow \nabla f$  anger åt vilket håll  $f$  växer  
 snabbast. 

