

* Idag: Partiella differentialekvationer

Fö3

Finita elementmetoden

Intro till datorövning 1

Demo (PDE + FEM)

* Partiella differentialekvationer (PDE)

- PDE är verktyget för att uttrycka naturvetenskapens grundläggande modeller

- PDE uttrycks i termer av differentialoperatorer:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)$$

$$\text{curl } f = \nabla \times f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)$$

$$\text{div } f \quad \nabla \cdot f = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \right)$$

$$(\text{Laplace}) \quad \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$$

Dessa operatorer kommer att introduceras i detalj senare i kursen!

* Exempel

- Poissons ekvation

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{i } \Omega & (1) \\ u = 0 & \text{på } \partial\Omega & (2) \end{cases}$$

↑
obekant funktion (temperatur)
↑
randen av Ω
↑
värmekälla

(1) är PDE:n

(2) är randvillkor

Beskriver

värmeflöde (u temperatur, f värmekälla)

elektrostatik (u potential, f laddning)

vätskeflöde (u hastighet, f kraft)

I viss mening den mest grundläggande av alla PDE!

- Värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} \dot{u} - \Delta u = f & \text{i } \Omega \times (0, T] \\ u = 0 & \text{på } \partial\Omega \times (0, T] \leftarrow \text{randvillkor} \\ u = u_0 & \text{på } \Omega \times \{0\} \leftarrow \text{begynnelsevillkor} \end{cases}$$

Tidsberoende version av Poissons ekvation

- Konvektion-diffusion-reaktion

$$\begin{cases} \dot{u} + \underbrace{\beta \cdot \nabla u}_{\text{konvektionshastighetsfält}} - \underbrace{\varepsilon \Delta u}_{\text{diffusion}} + \underbrace{cu}_{\text{reaktion}} = f \leftarrow \text{källterm} \\ + \text{randvillkor och begynnelsevillkor} \end{cases}$$

- Stokes ekvationer (vätskeflöde)

$$\begin{cases} -\Delta \vec{u} + \nabla P = \vec{f} \quad \text{tryck (skalär)} \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$$

hastighet (vektor)

Ett system av 2 st PDE

- Navier-Stokes ekvationer (vätskeflöde)

$$\begin{cases} \rho \frac{Du}{Dt} - \epsilon \Delta u + \nabla p = f \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases}$$

← ej linjär i u

System av icke-linjära PDE

- Linjär elasticitet

$$-\nabla \cdot \sigma(u) = f$$

↖ spänningstensor
↖ vektor
↖ matris vektor

$$\sigma(u) = 2\mu \epsilon(u) + \lambda (\nabla \cdot u) I$$

↖ Lamé parameters

$$\epsilon(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T)$$

↖ Symmetriska gradienten

- Schrödinger-ekvationen (kvantmekanik)

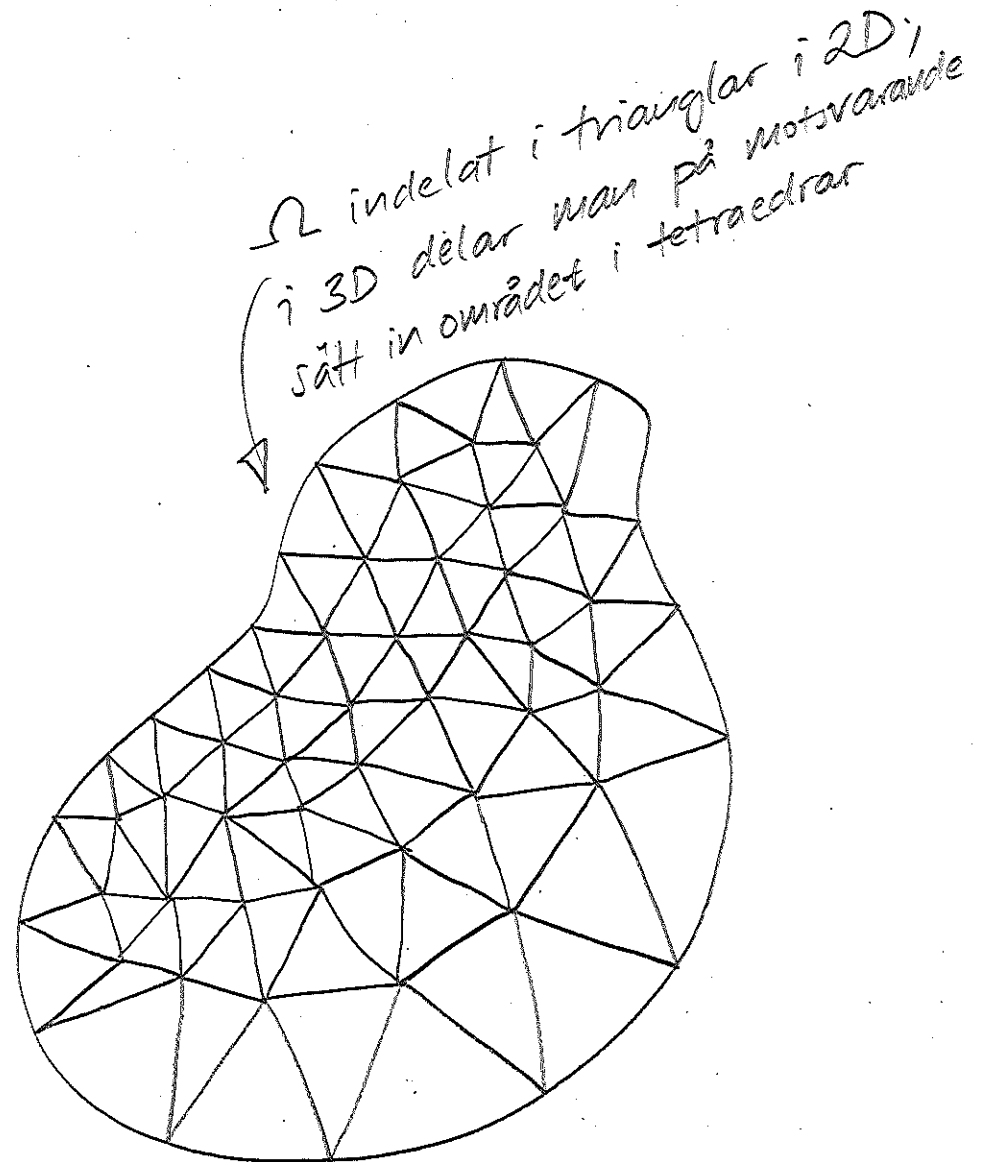
$$i\hbar \Psi_t = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x,t) \right] \Psi$$

↖ vågfunktionen (obekant)
↖ given potential

Naturlig fråga: Hur löser vi dessa ekvationer?

* Finita elementmetoden (FEM)

- En generell (numerisk) metod för att lösa PDE
- Dela in området Ω i ett stort antal (finita) element
- Beskriv lösningen som ett enkelt polynom på varje element
- Beräkna lösningen på alla elementen genom att lösa ett stort ekvations-system



* Illustration av FEM för Poisson

(Innehåller moment som vi ännu inte introducerat, men se detta som en "teaser" inför läsvecka 2-8...)

(i) Ekvation ("stark form")

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{i } \Omega \\ u = 0 & \text{på } \partial\Omega \end{cases}$$

(ii) Variationsformulering ("svag form")

$$\Rightarrow \begin{cases} -\Delta u = f \\ -\Delta u v = f v \end{cases}$$

Multiplicera med en "testfunktion v "

$$\Rightarrow \int_{\Omega} -\Delta u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$$

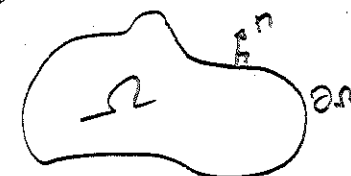
Integrera över Ω

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \underbrace{\partial_n u}_{v=0 \text{ på } \partial\Omega} v \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx$$

Integrera partiellt i $\mathbb{R}^n$

normalderivatan

$$\partial_n u = \nabla u \cdot \mathbf{n} = D_n u$$



$$\Rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Detta är "variationformuleringen" av Poissons ekvation.

(iii) Ekvationssystem

Låt $u(x) \approx u_h(x) = \sum_{j=1}^N U_j \phi_j(x)$

← koefficienter som skall beräknas

← basfunktioner

Låt $v = \phi_i$ för $i=1, \dots, N$

Ger ett linjärt ekvationssystem

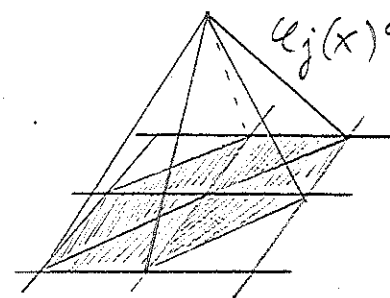
$$AU = b$$

där

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i \, dx$$

$$b_i = \int_{\Omega} f \phi_i \, dx$$

Övning: Visa detta! (Eller lita på mig och anrika bevis senare i kursen!)



- Samma teknik funkar för andra PDE!
- Ger ett generellt och mycket kraftfullt verktyg för att lösa komplicerade och relevanta modeller!

* Demo 1 : Visualisering i MATLAB

linspace, plot3, meshgrid, contour, isosurface(shading interp)

Demo 2 : Lösning av PDE i FENICS/Python

- Poissons ekvation
- Stokes
- Hyperelasticitet
- Navier-Stokes

För den intresserade : Se <http://fenicsproject.org/>
Ladda hem och installera på egen dator!