

MVE255 2013-14 Fö 4.3

Idag: Kurvintegral 3.3
 Tangentkurvintegral 3.4
 Konservativt fält 3.5

Kurvintegralen

Parametriserad kurva

$$C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad t \in [a, b] \quad \text{eller} \quad C: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

Tangentvektor: $\mathbf{T} = \mathbf{r}'(t)$

Båglängds element: $ds = |\mathbf{r}'(t)| dt$

Längd: $L = \int_C ds = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt$

Skalarfält: $f: A \rightarrow \mathbb{R}, \quad A \subset \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z)$$

Kurvintegral:

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt$$

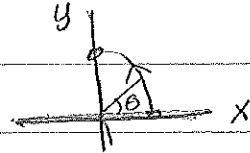
Man kan parametrisera en kurva c på flera sätt. Kurvintegralen beror inte på vilken parametrisering man väljer.

Exempel



$$f(x, y) = x$$

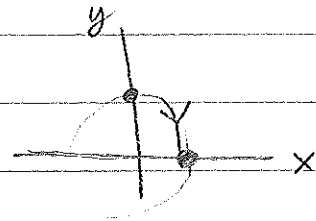
$$1) \begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \end{cases}, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$



$$ds = d\theta$$

$$\int_c f ds = \int_0^{\pi/2} \cos(\theta) d\theta = [\sin \theta]_0^{\pi/2} = 1$$

$$2) \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}, t \in [0, 1]$$



$$ds = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$\int_c f ds = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2t dt$$

$$= \left[-(1-t^2)^{\frac{1}{2}} \right]_0^1 = 1$$

Tangentkurvintegralen

Vektorfält: $F: A \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$F = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}$$

$$= (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

Vektorbåglängdselement:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t) dt = \underbrace{\frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}}_{=\hat{\mathbf{T}}} \underbrace{|\mathbf{r}'(t)| dt}_{=ds}$$

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{T}}{|\mathbf{T}|}$$

$d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{T}} ds$, $\hat{\mathbf{T}}$ är enhets tangenten

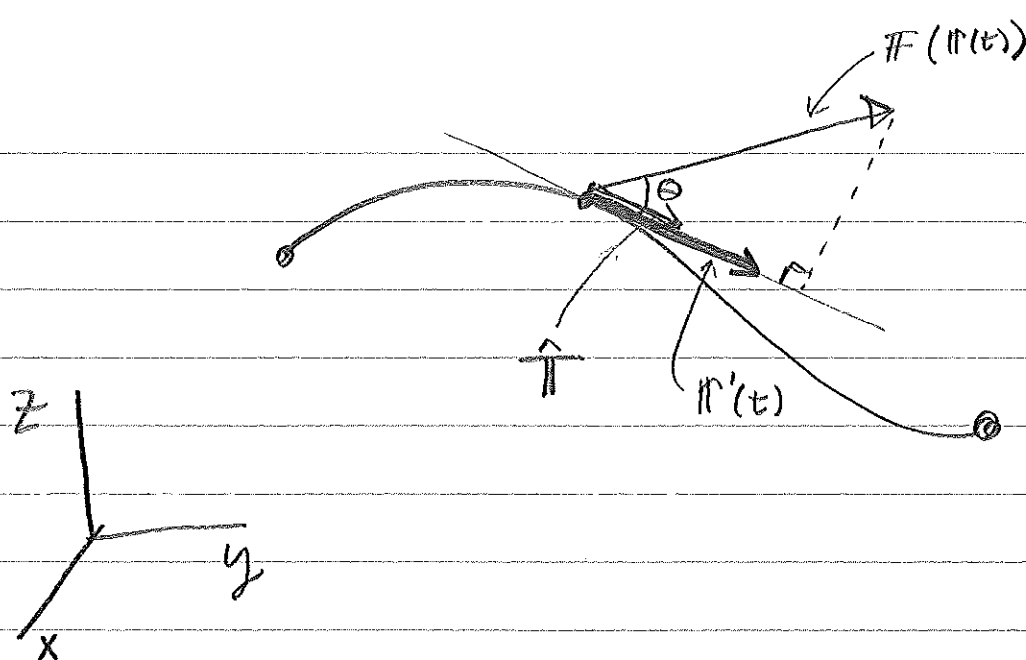
Tangentkurvintegral:

$$\int_C F \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b F(\mathbf{r}(t)) \cdot d\mathbf{r}$$

Obs att

$$\int_C F \cdot d\mathbf{r} = \int_C F \cdot \hat{\mathbf{T}} ds$$

dvs vi integrerar den skalära
projektion $F \cdot \hat{\mathbf{T}}$ av F på
tangenten.



$$F \cdot \hat{T} = |F| \underbrace{|\hat{T}|}_{=1} \cos \theta = |F| \cos \theta$$

skalära projektionen = tangent-komponenten

Exempel (Arbete)

Om F är ett kraftfält så blir

$$W = \int_C F \cdot dr = \int_C \underbrace{F}_{[N]} \cdot \underbrace{\hat{T} ds}_{[m]} \quad [Nm]$$

arbetet som uträknas då en partikel rör sig längs C i kraftfältet F .

Exempel

$$F(x, y, z) = (y, x, z) \quad , \quad f(x, y, z) = xyz^2$$

$$C: \mathbf{r} = (\cos(t), \sin(t), t), \quad t \in [0, 2\pi] \text{ (spiral)}$$

$$\text{Tangent: } \mathbf{T} = \mathbf{r}'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{Element: } d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t) dt = (-\sin(t), \cos(t), 1) dt$$

$$ds = |\mathbf{r}'(t)| dt = \sqrt{2} dt$$

$$\int_C F \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} F(\mathbf{r}(t)) \cdot d\mathbf{r} =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin(t), \cos(t), t) \cdot (-\sin(t), \cos(t), 1) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin^2(t) + \cos^2(t) + t) dt$$

$$= \dots \text{ (inte intressant)}$$

$$\int_C f ds = \int_0^{2\pi} \cos(t) \sin(t) t^2 \sqrt{2} dt = \dots ?$$

De flesta integraler man ställer upp

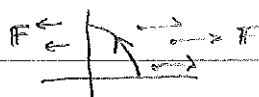
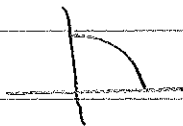
blir omöjliga av räkna ut. Men

det viktiga är att ställa upp integralen och veta vad det betyder. Beräkning gör med Matlab om det behövs.

Sats 3.4.4 : $\int_C \mathbb{F} \circ d\mathbf{r}$ beror inte
på valet av parametrisering
om de har samma orientering.

Den får motsatt tecken om
man byter orientering.

Ex. $\mathbb{F}(x, y) = (x, 0)$



1) $\begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \end{cases}, \theta \in [0, \pi/2], d\mathbf{r} = (-\sin\theta, \cos\theta) d\theta$

$$\begin{aligned} \int_C \mathbb{F} \circ d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi/2} (\cos\theta, 0) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta) d\theta \\ &= -\int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta = \\ &= \frac{1}{4} [\cos 2\theta]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4} ((-1) - (+1)) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

2) $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}, t \in [0, 1]$



$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \left(1, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right) dt & \int_C \mathbb{F} \circ d\mathbf{r} &= \int_0^1 (t, 0) \cdot \left(1, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right) dt = \\ &= \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} & \text{motsatt tecken} \end{aligned}$$

Konservativa fält

Skalarfält $\phi: A \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(r)$

Gradientfältet: $\nabla \phi(r) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$

Sats 3.5.1

i boken.

Säs precis formulering

 Kurva från a till b.

$$\int_C \nabla \phi \cdot dr = \phi(b) - \phi(a)$$

Bewis Parametrisera kurvan, $C: r = r(t)$

Medjeregeln:

$$\begin{aligned} r(a) &= a \\ r(b) &= b \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \phi(r(t)) = \nabla \phi(r(t)) \cdot r'(t)$$

Då fås

$$\begin{aligned} \int_C \nabla \phi \cdot dr &= \int_a^b \nabla \phi(r(t)) \cdot r'(t) dt = \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} \phi(r(t)) dt = \phi(r(b)) - \phi(r(a)) \\ &= \phi(b) - \phi(a) \end{aligned}$$

Integralen $\int_C \nabla \phi \cdot dr$ beror ej på vägen från a till b, C

Def. 3.5.2 Vektorfältet F kallas

konserverbart i A om det finns
skalärt fält ϕ så att

$$F = \nabla \phi \text{ in } A.$$

Fallet ϕ kallas potential till F .

Obs: $\begin{cases} \text{stufen f. kurva} \\ \text{kons. f. ält} \end{cases} \quad \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(b) - \phi(a) = 0$
 $a=b$ 

Exempel $\phi(r) = -\frac{k}{|r|} = -k(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$

Derivada: $\frac{\partial \phi}{\partial x} = -k(-\frac{1}{2})(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2x$

$= \frac{kx}{|r|^3}$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{ky}{|r|^3}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{kz}{|r|^3}$$

$$\nabla \phi = k \frac{(x, y, z)}{|r|^3} = k \frac{r}{|r|^3}$$

Das $\mathbb{P}(x) = k \frac{x^n}{1+x^{13}}$ hat polartischen

$$\phi(r) = -\frac{k}{|r|}$$

Sats 3.5.3 Om $\mathbb{F}$ är konservativt i A

$$\text{så är } \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{r}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\mathbf{r}) \text{ i } A.$$

Beweis Konservativt $\mathbb{F} = \nabla \phi$.

$$\text{Derivera: } F_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$\text{På samma vis } \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}$$

Dessa är lika.

Sats 3.5.4 Om A är enkelt samman-

hängande så är $\mathbb{F}$ konservativt

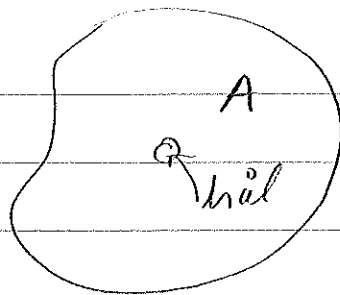
i A om och endast om

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \text{ i } A.$$

Beweis för svårt.

Enkelt sammanhängande:
inget genomgående hål.

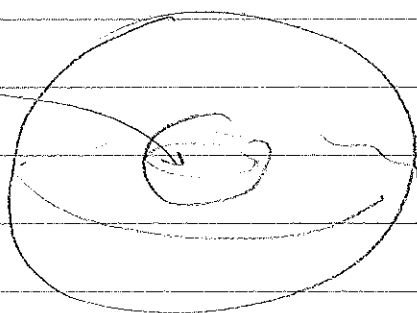
2 planet:



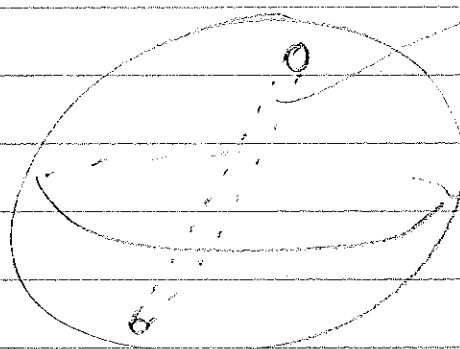
ej enhelt sammanhängande

3 rummet:

hål



enhelt sammanhängande



genomborrad

ej enhelt sammanhängande

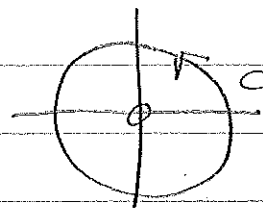
Exempel 3

$$F = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

Här $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$

men $\oint_C F \cdot dr = 2\pi \neq 0$

för cirkeln.



F är kons. i $A = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, hål i origo.

Ingen potential i A .

Läs Exempel 5!