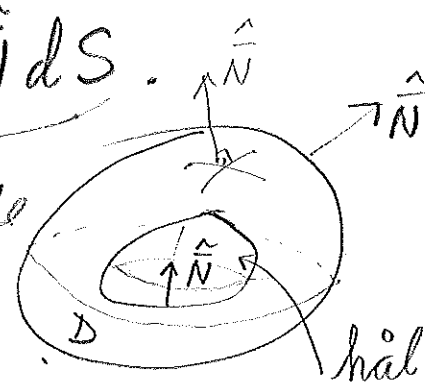


Integralsatser6.14. Sats 6.14.1 Divergenssatsen (Gauss sats)

Antag att D är ett område i rummet $\mathbb{R}^3$ vars rand är en styckvis glatt orienterad yta $\mathcal{S}$ med utåtriktat normalvektorfält $\hat{\mathbf{N}}$. Om $\vec{F}$ är ett glatt vektorfält i D , så gäller

$$\iiint_D \underbrace{\nabla \cdot \vec{F}}_{=\text{divergens}} dV = \iint_{\mathcal{S}} \underbrace{\vec{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}}_{=\text{flöde}} dS.$$


(utan bevis)

Detta är en 3-D version av fundamentalsatsen:

$$\int_a^b Df(x) dx = [f(x)]_a^b.$$

Förklaringar:

(2)

glatt (smooth) = tillräckligt
deriverbar.

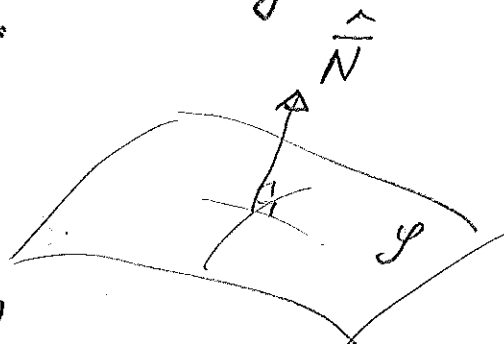
- för $\bar{F}$: $\bar{\nabla} \cdot \bar{F}$ ska vara
kontinuerlig så att
 $\iiint_D \bar{\nabla} \cdot \bar{F} dV$ existerar

- för $\mathcal{S}$: $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$, och
tangenterna $\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}$
ska vara kontinuerliga
så att $\hat{N} = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right) / \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right|$
och $\hat{N} dS = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right) du dv$
existerar.

En orienterbar yta $\mathcal{S}$ har ett enhets- (3)

-normalvektorfält $\hat{N}$ som varierar kontinuerligt över $\mathcal{S}$. Fältet $\hat{N}$

definierar en orientering av $\mathcal{S}$,



dvs en positiv sida och en negativ sida.

Möbius band är ej orienterbar.

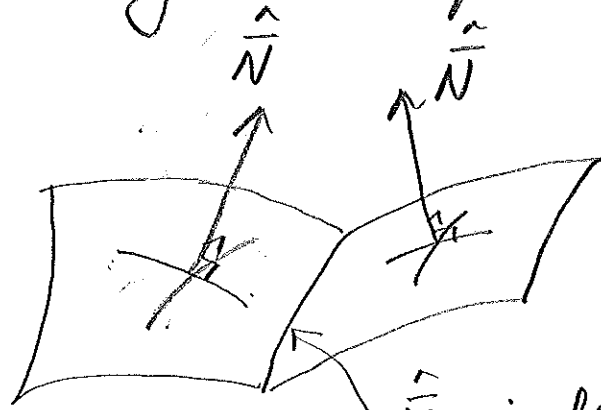
En orienterad yta är en yta tillsammans med ett val av orientering.

Detta behövs för att flödesintegralen

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \hat{N} dS$$
 ska existera.

En styckvis glatt orienterad (4

yta är hopskarvad av
glatta orienterade ytor så
att orienteringarna "passar
ihop".



$\hat{N}$ ej definierad
på skarven

Exempel:

(5a)

Beräkna $\iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2) dS$ där

$\mathcal{S}$ är sfären $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Vi ser genast: $\hat{N} = \hat{r} = \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|} = \frac{\bar{r}}{a}$ (utåt!)

Hitta på $\bar{F}$ så att $\bar{F} \cdot \hat{N} = x^2 + y^2$.

Tag $\bar{F} = a(x\bar{i} + y\bar{j})$. Då blir

$$\begin{aligned}\bar{F} \cdot \hat{N} &= a(x\bar{i} + y\bar{j}) \cdot \frac{1}{a}(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) \\ &= x^2 + y^2\end{aligned}$$

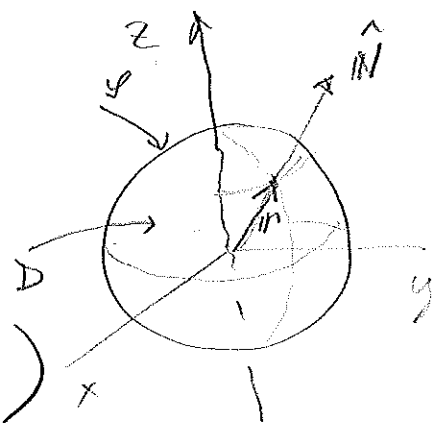
$$\bar{\nabla} \cdot \bar{F} = a\left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y}\right) = 2a.$$

Gauss sats: $\left(D \text{ är klotet } x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \right)$

$$\iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2) dS = \iint_{\mathcal{S}} \bar{F} \cdot \hat{N} dS =$$

$$= \iiint_D \bar{\nabla} \cdot \bar{F} dV = 2a \iiint_D dV =$$

$$= 2a \cdot \frac{4\pi a^3}{3} = \frac{8\pi a^4}{3}.$$



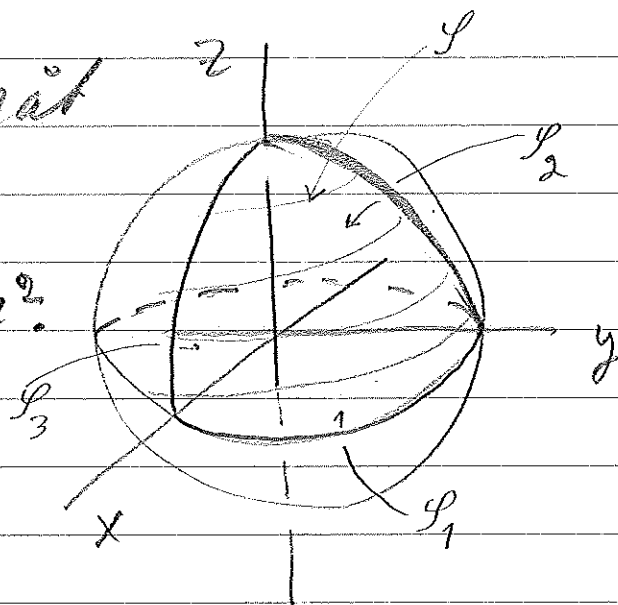
16.4:12

$$\mathbf{F} = (y + xz)\mathbf{i} + (y + yz)\mathbf{j} - (2x + z^2)\mathbf{k}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = z + 1 + z - 2z = 1$$

Beräkna flödet uppåt genom första oktanter $\mathcal{P}$ av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Alltså: $\iint_{\mathcal{P}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$



På $\mathcal{P}$: $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \quad dS = a^2 \sin \phi d\phi d\theta$$

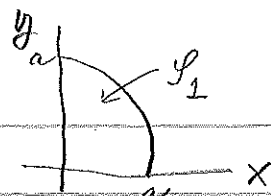
$$\iint_{\mathcal{P}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \text{ för krångligt}$$

Divergenssatsen: $\mathcal{D}$ = första oktanter av klotet

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \mathbf{F} dV &= \iint_{\mathcal{P}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS + \iint_{\mathcal{P}_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS + \iint_{\mathcal{P}_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \\ &\quad + \iint_{\mathcal{P}_3} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \end{aligned}$$

Här är $\iiint_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iiint_{\mathcal{D}} dV = V = \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi a^3}{3} = \pi \frac{a^3}{6}$

På $\mathcal{P}_1$: $z=0$, $\hat{N} = -\mathbf{k}$



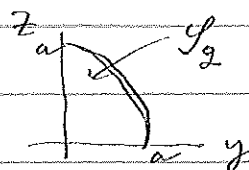
$$\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = +2x$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad ds = r dr d\theta$$

$$\iint_{\mathcal{P}_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} ds = \iint_{\mathcal{P}_1} 2x ds = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^a r \cos \theta r dr d\theta = 2 \frac{a^3}{3} = \frac{2a^3}{3}$$

På $\mathcal{P}_2$: $x=0$, $\hat{N} = -\mathbf{i}$

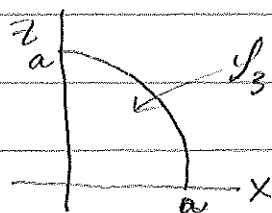
$$\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = -y$$



$$\iint_{\mathcal{P}_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} ds = -\iint_{\mathcal{P}_2} y ds = \text{samma räkning} = -\frac{a^3}{3}$$

På $\mathcal{P}_3$: $y=0$, $\hat{N} = -\mathbf{j}$

$$\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = 0$$



$$\iint_{\mathcal{P}_3} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} ds = 0$$

Alltså:

$$\iint_{\mathcal{P}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} ds = \pi \frac{a^3}{6} - \frac{2a^3}{3} + \frac{a^3}{3} = (\pi - 2) \frac{a^3}{6}$$

Varianter av Gauss sats (ej i boken) (6)

$$\iiint_D \nabla \times \bar{F} dV = \iint_{\mathcal{P}} \hat{\bar{N}} \times \bar{F} dS = - \iint_{\mathcal{P}} \bar{F} \times \hat{\bar{N}} dS$$

$$\iiint_D \nabla \phi dV = \iint_{\mathcal{P}} \phi \hat{\bar{N}} dS$$

De viktiga användningarna
av Gauss sats är:

1) härledning av värmelednings-
ekvationen (och andra PDE):

$$-\nabla \cdot (a \nabla u) = f$$

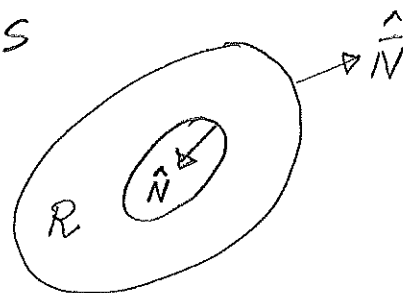
2) partiell integration (grunden
för FEM):

$$\iiint_D \nabla \cdot (\phi \bar{F}) dV = \iint_{\mathcal{P}} \hat{\bar{N}} \cdot \bar{F} \phi dS - \iiint_D \bar{F} \cdot \nabla \phi dV$$

Gauss sats i planet

(7)

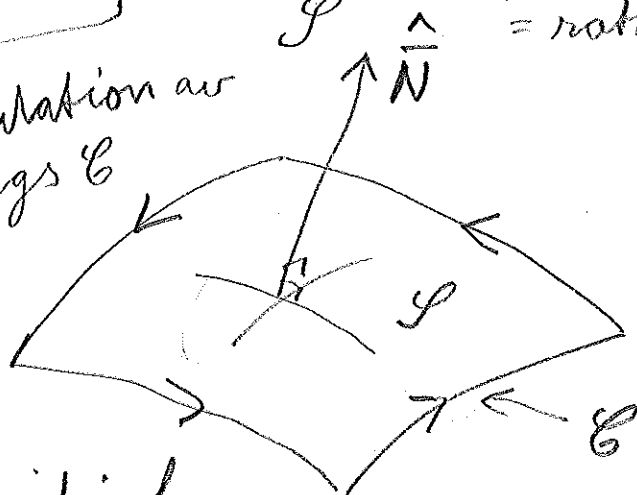
$$\iint_R \nabla \cdot \vec{F} dA = \int_C \vec{F} \cdot \hat{\vec{N}} ds$$



6.15 (Bära översiktligt.)

Sats 6.15.1 Stokes sats

$$\underbrace{\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}}_{\substack{= \text{cirkulation av} \\ \vec{F} \text{ längs } C}} = \iint_S (\underbrace{\nabla \times \vec{F}}_{\substack{= \text{rotation av } \vec{F} \text{ på } S}}) \cdot \hat{\vec{N}} dS$$



C är positivt
orienterad med avseende på S
(tumregeln)

Detta är en annan variant av
fundamentalsatsen.

17.7

Adams bevisar Gauss sats genom att först göra Greens sats i planet. Detta är inte så viktigt för oss.

Sats 6 Greens sats i planet

$$\iint_R (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{k} \, dA = \oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = \oint_{\mathcal{C}} F_1 dx + F_2 dy$$

$\mathcal{C}$ är positivt orienterad med avseende på R

