

Alla dessa derivatorPartiell derivata

$$z = f(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = f'_1 = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{osv.}$$

Kedjeregeln

t.ex. $g(x, y, t) = f(u(x, y), v(x, t))$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = f'_1(u(x, y), v(x, t)) u'_1(x, y) + f'_2(u(x, y), v(x, t)) v'_1(x, t)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = f'_2(u(x, y), v(x, t)) v'_2(x, t)$$

Riktig derivata ges av linjärisering

$$\begin{aligned} L(x, y) &= f(a, b) + f'_x(a, b)(x-a) + f'_y(a, b)(y-b) \\ &= f(a, b) + f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k \end{aligned}$$

f är deriverbar i (a, b) om

$$\lim_{\sqrt{h^2+k^2} \rightarrow 0} \frac{f(x,y) - L(x,y)}{\sqrt{h^2+k^2}} \rightarrow 0$$

Då gäller:

$$f(x,y) \approx L(x,y) \quad \text{nära } (a,b)$$

Högre ordning: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

På matrisform

$$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad y = f(x) \\ x \in \mathbb{R}^m, \quad y \in \mathbb{R} \\ h = x - a$$

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$= f(a) + f'(a)h$$

$$= [\cdot] + [\cdot \cdot \cdot] \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Jacobi-matris:

$$f'(a) = Df(a) = [f'_1(a), \dots, f'_n(a)]$$

$$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \quad y = f(x), x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$$

$$L(x) = f(a) + f'(a)h$$

$$= \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

$$m \times 1 \quad m \times m \quad m \times 1$$

Hedjeregeln

$$Df(g(x)) = Df(g(x)) Dg(x)$$

Taylor's formel (grad 2)

$$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2} h^T f''(a) h + R$$

Newton's metod

Lös ekv. systemet

$$f(x) = 0$$

där $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Antag att x_0 är en approx
lös. Vi vill hitta
en bättre approx $x = x_0 + h$.

Lös den linjärskala ekv

$$L(x) = 0$$

$$\text{d.v. } f(x_0) + f'(x_0)h = 0$$

$$f'(x_0)h = -f(x_0)$$

Detta leder till algoritmen

Välj x och $h = \text{tol} + 1$

while $|h| > \text{tol}$

beräkna residualen $b = -f(x)$

beräkna J-matris $A = f'(x)$

lös linj. ekv. $Ah = b$

uppdatera $x = x + h$

end

Globala max-, min-, sadelpunkter

1. kritisk punkt ges av

$$f'(x)^T = 0$$

$$\text{dvs } \begin{cases} f'_1(x) = 0 \\ f'_2(x) = 0 \\ \vdots \\ f'_m(x) = 0 \end{cases}$$

2. undersök Hesse-matrisen

pos. def.

lok min

neg. def.

lok max

indefinit

sadel

annars

ingen info

(5)

Max/min problem

1. Inre singulära punkter $f'(x)$ existerar
Inre kritiska punkter $f'(x) = 0$
2. Randpunkter

Geometriska derivator

grad, div, rot

$$\nabla \phi, \quad \nabla \cdot F, \quad \nabla \times F$$

Riktungsderivata: $u = u_1 i + u_2 j$
 $|u| = 1$

$$D_u f(a,b) = \left. \frac{d}{dt} f(a + t u_1, b + t u_2) \right|_{t=0}$$

$$D_u f(a,b) = u \cdot \nabla f(a,b)$$

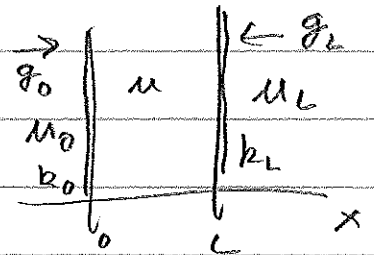
∇f är normalvektor till
nivåkurva och nivåyta.

Produktderivator

f.ex. $\nabla \cdot (\phi F) = \nabla \phi \cdot F + \phi \nabla \cdot F$

och $\nabla \times \nabla \phi = 0$
 $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$

Randvärdesproblem



$$1-D \quad \begin{cases} -D(a D u) = f & \text{in } (0, L) \\ a D_N u + k(u - u_A) = g & x = 0, L \end{cases}$$

$$D_N u = \begin{cases} D u & x = L \\ -D u & x = 0 \end{cases} \quad k = \begin{cases} k_L \\ k_0 \end{cases} \text{ osv.}$$

$\vec{j} = -a D u$

Veta betydelsen

Lösa med två integrationer

Strong form, FEM

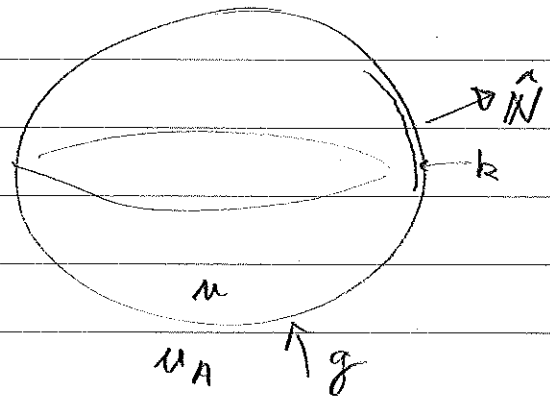
3-D

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a \nabla u) = f & \text{in } D \\ u = u_A & \text{på } S_1 \\ a D_{\hat{n}} u + k(u - u_A) = g & \text{på } S_2 \end{cases}$$

$$F = -a \nabla u$$

Derivata detta.

Randvärde



Utförelse geman S:

$$\begin{cases} \hat{n} \cdot F = k(u - u_A) - g \\ \hat{n} \cdot F = \hat{n} \cdot (-a \nabla u) = -a \hat{n} \cdot \nabla u = \\ = -a D_{\hat{n}} u. \end{cases}$$

$$\Rightarrow -a D_{\hat{n}} u = k(u - u_A) - g$$

$$k = \infty: \quad \underbrace{\frac{1}{k} a D_{\hat{n}} u}_{\rightarrow 0} + u - u_A = \underbrace{\frac{1}{k} g}_{\rightarrow 0} \text{ på } S_1$$

$$u - u_A = 0 \text{ på } S_1$$