

Hervariabelanalys

* Funktion av flera variabler:

$$f(\mathbf{r}) = f(x, y, z) \quad (\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

eller med matrisbeteckningar

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$$

* Vektorvärd funktion:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_x(\mathbf{r})\mathbf{i} + F_y(\mathbf{r})\mathbf{j} + F_z(\mathbf{r})\mathbf{k}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)]$$

* Både matris- och vektorbeteckningar.

* Derivera: Df , ∇f , $\nabla \cdot \mathbf{F}$, $\nabla \times \mathbf{F}$

* Integrera: $\iiint f dx dy dz$

* Optimera: $\max_{\mathbf{D}} f(\mathbf{x})$

* System av ekv: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$, Newtons metod.

* Partiella differentialekvationer (PDE):

$$-\nabla \cdot (a \nabla u) = f$$

* Finita elementmetoden (FEM).

Idag: * Vektorfunktion av 1 variabel.
* Parametrisering av kurva.

Adams: 1.1, 1.3

Vektorfunktion

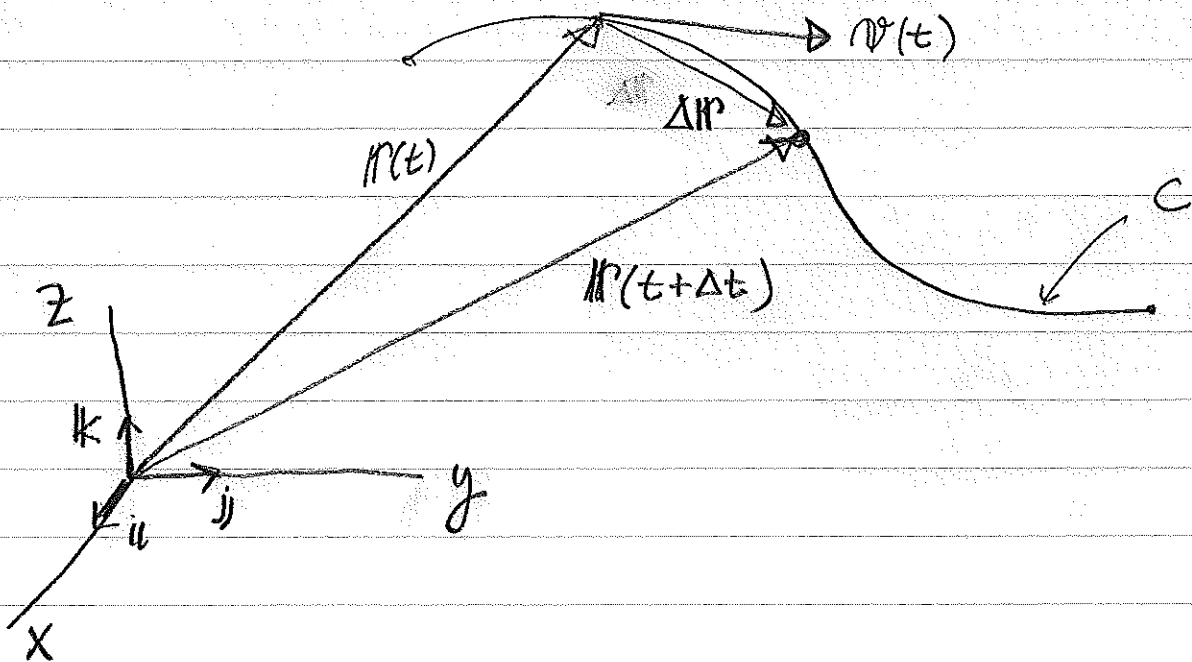
$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Geometrisk tolkning:
läget av partikel
vid tiden t .

Partikeln rör sig längs en
kurva C .



(3)

Medelhastighet: $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$

Hastighet (velocity):

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$$

○ Fart (speed): $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$

○ Derivera komponentvis: $\mathbf{v} = x' \mathbf{i} + y' \mathbf{j} + z' \mathbf{k}$

Geometrisk tolkning: $\mathbf{v}(t)$ är

tangentvektor till C i punkten $\mathbf{r}(t)$.

○ Acceleration: $\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{r}''(t)$
 $= \mathbf{v}'(t) = \mathbf{v}''(t)$

Exempel (cirkel) ($a > 0, \omega > 0$)

$$\begin{cases} x = a \cos(\omega t) \\ y = a \sin(\omega t) \\ z = 0 \end{cases}$$

eliminera t :

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (\text{cirkel})$$

$$\mathbf{r} = a \cos(\omega t) \mathbf{i} + a \sin(\omega t) \mathbf{j}$$

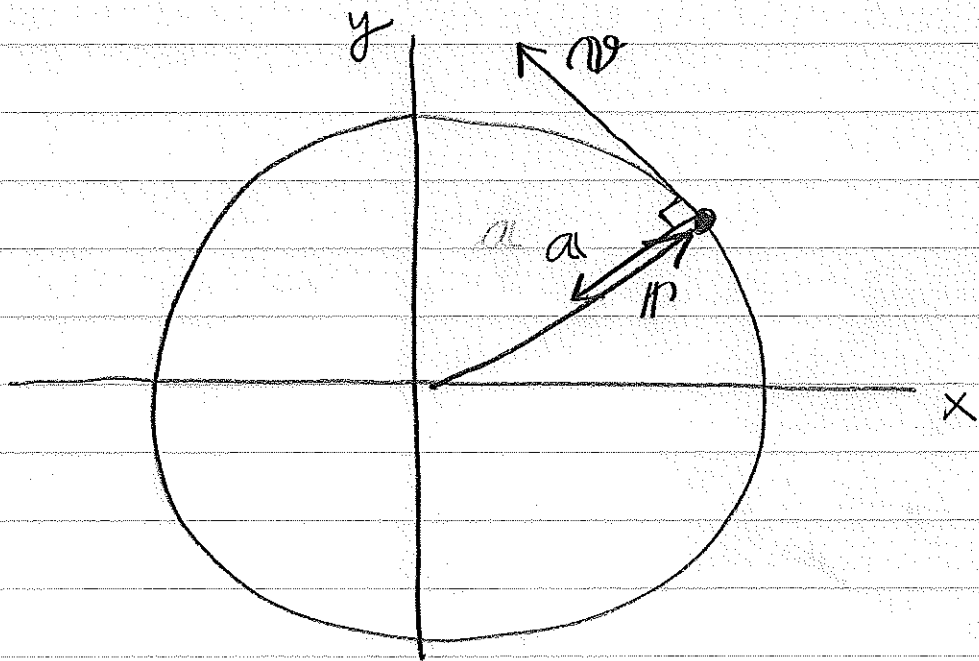
$$\mathbf{v} = -a\omega \sin(\omega t) \mathbf{i} + a\omega \cos(\omega t) \mathbf{j}$$

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{(-a\omega \sin(\omega t))^2 + (a\omega \cos(\omega t))^2}$$

$$= \sqrt{a^2 \omega^2} = |a\omega| = a\omega$$

$$\mathbf{a} = -a\omega^2 \cos(\omega t) \mathbf{i} - a\omega^2 \sin(\omega t) \mathbf{j} = -\omega^2 \mathbf{r}$$

Obs: $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0$ ortogonala ($\mathbf{r} \perp \mathbf{v}$)



(5)

Exempel (spets "cusp")

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

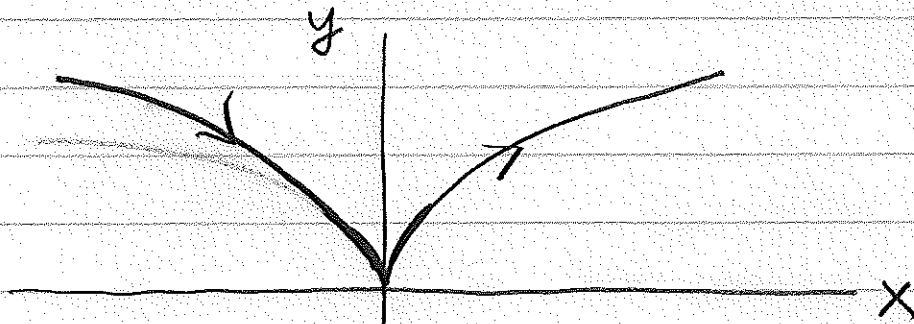
$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= t^3 \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} \\ \mathbf{v} &= 3t^2 \mathbf{i} + 2t \mathbf{j} \end{aligned}$$

Eliminera t : $t = x^{1/3}$, $y = t^2 = (x^{1/3})^2 = x^{2/3}$

○ Kurvan är en graf:

$$y = x^{2/3}$$

$$(y' = \frac{2}{3} x^{-1/3})$$



○ Obs: $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ i origo.

○ Partikeln saktar in och vänder i origo.

Theorem 1 (derivierungsregler)

Sats 1: derivering av kombinationer

Om $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ och $\lambda(t)$ är deriverbara så är $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\lambda\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ och $\mathbf{u} \circ \lambda$ deriverbara och

$$(a) \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u}' + \mathbf{v}'$$

$$(b) \quad \frac{d}{dt}(\lambda\mathbf{u}) = \lambda'\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u}'$$

$$(c) \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}'$$

$$(d) \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u}' \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}'$$

$$(e) \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{u}(\lambda(t))) = \lambda'(t)\mathbf{u}'(\lambda(t))$$

$$(f) \quad \frac{d}{dt}|\mathbf{u}(t)| = \frac{\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}'(t)}{|\mathbf{u}(t)|} \quad \text{om } \mathbf{u}(t) \neq 0$$

Bevis. Skriv på komponentform och använd de vanliga deriveringsreglerna.

Obs från (c):

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}|^2 = \frac{d}{dt}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'$$

och

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}|^2 = 2|\mathbf{u}| \frac{d}{dt}|\mathbf{u}|$$

vilket ger

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{u}| = \frac{1}{2|\mathbf{u}|} \frac{d}{dt}|\mathbf{u}|^2 = \frac{1}{2|\mathbf{u}|} 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'}{|\mathbf{u}|}$$

Detta är ett alternativt bevis av (f).

Det är enklare att räkna med $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ än med $|\mathbf{u}|$!

Parametrisering av kurva (Adams 11.3)

16

En kurva i rummet är en punktmängd av formen:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in [a, b]$$

där koordinatfunktionerna är kontinuerliga (så att den hänger ihop).

Vi antar även att $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ är kontinuerlig, annars kan kurvan vara patologisk, t.ex. fraktal.

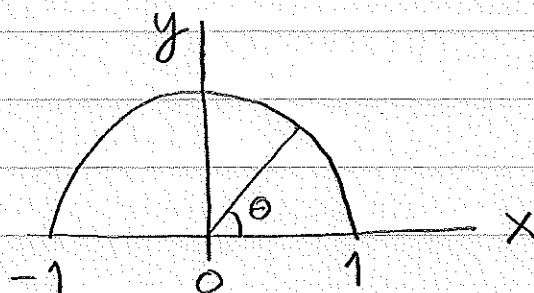
Kurvan blir då slät (smooth) utom möjligen där $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{0}$.
(kom ihåg: spets).

En kurva kan parametreras på många sätt.

Exempel (halvcirkel)

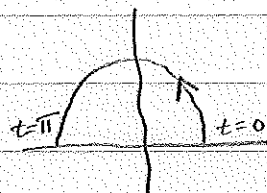
(7)

$$x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$$



a) Välj $t = \theta$.

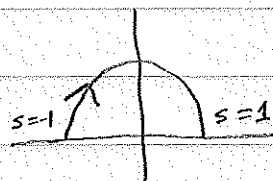
$$\begin{cases} x = \cos(t), \\ y = \sin(t), \end{cases} \quad t \in [0, \pi]$$



$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\sin(t)\mathbf{i} + \cos(t)\mathbf{j}, \quad \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = 1$$

b) Välj $s = x$.

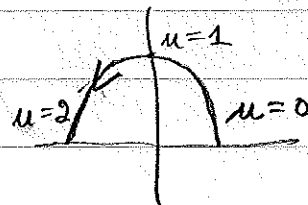
$$\begin{cases} x = s, \\ y = \sqrt{1-s^2}, \end{cases} \quad s \in [-1, 1]$$



$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{i} + \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}\mathbf{j}, \quad \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$$

c) Välj $u = 1-x$.

$$\begin{cases} x = 1-u, \\ y = \sqrt{1-(1-u)^2}, \end{cases} \quad u \in [0, 2]$$



$$\frac{d\mathbf{r}}{du} = -\mathbf{i} + \frac{1-u}{\sqrt{1-(1-u)^2}}\mathbf{j}, \quad \left| \frac{d\mathbf{r}}{du} \right| = \frac{1}{\sqrt{1-(1-u)^2}}$$

Byte av parameter:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{\text{skalär}} \quad (\text{kedjeregeln})$$

påverkar farten och

byter riktning om $\frac{ds}{dt} < 0$.

I vårt exempel $\frac{du}{ds} = \frac{d(1-x)}{dx} = -1$.

Exempel (rät linje)

$$\begin{cases} x = x_0 + t v_x \\ y = y_0 + t v_y \\ z = z_0 + t v_z \end{cases}, t \in (-\infty, \infty)$$

$$r = r_0 + t v$$

$$\frac{dr}{dt} = v$$

