

FÖ 1.2

Båglängd (arc length)

(1)

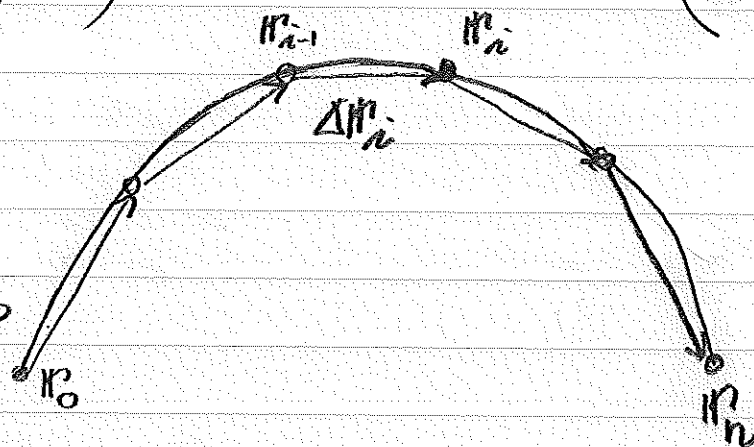
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad t \in [a, b]$$

Nät (mesh):

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_n = b$$

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}(t_i), \quad \Delta \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}$$



Kurvans längd approximeras av:

$$S_n = \sum_{i=1}^n |\Delta \mathbf{r}_i| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\Delta \mathbf{r}_i}{\Delta t_i} \right| \Delta t_i$$

Om $\max \Delta t_i \rightarrow 0$ och $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ är kontinuerlig
får vi kurvans längd:

$$L = \int_a^b \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt$$

Båglängden är

$$s(\tilde{t}) = \int_a^{\tilde{t}} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt$$

Vi får $\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right| = v(t)$ (farten)

Båglängdselementet är

$$ds = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt$$

$$L = \int_a^b ds = \int_a^b \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt$$

Båglängden kan också användas (2)
som parameter:

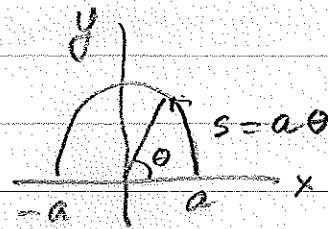
$$r = r(s), \quad s \in [0, L]$$

Då blir farten

$$v(s) = \frac{ds}{dt} = 1.$$

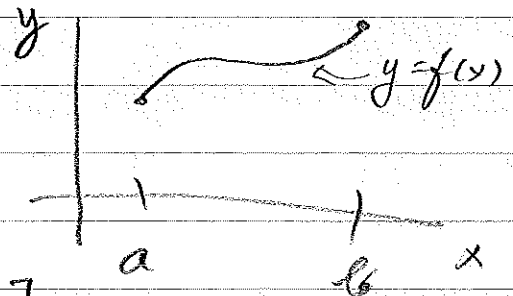
Exempel (halvcirkel)

$$\begin{cases} x = a \cos\left(\frac{s}{a}\right) \\ y = a \sin\left(\frac{s}{a}\right) \end{cases}, \quad s \in [0, a\pi]$$



Exempel (graf i planet)

$$y = f(x), \quad x \in [a, b]$$



Välj $t = x$:

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b]$$

$$v = \frac{dr}{dt} = \dot{x} + f'(t)\dot{y}, \quad v(t) = \left| \frac{dr}{dt} \right| = \sqrt{1 + f'(t)^2}$$

$$ds = \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

$$\text{eller } ds = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx, \quad L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Krökning (Adams 11.4 endast 644-646)

Kurva på parameterform:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

Om $v(t) \neq 0$ så kan vi bilda enhetstangenten:

$$\hat{\mathbf{T}}(t) = \frac{v(t)}{v(t)} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|}$$

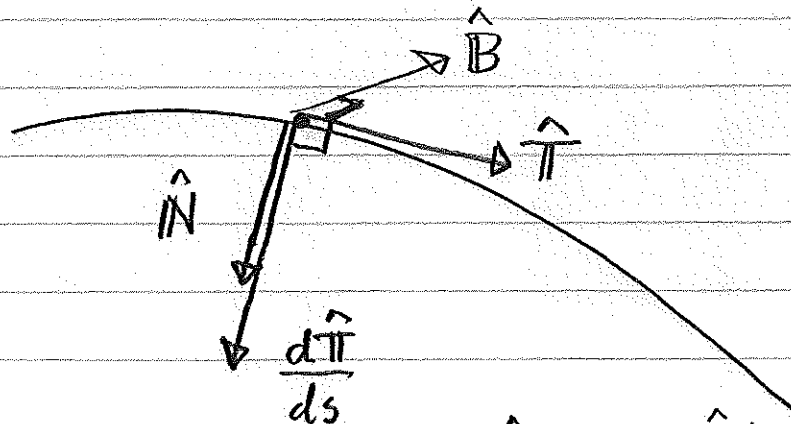
"hatt" betyder normering

Med båglängdsparametrisering har vi $v=1 \neq 0$ så att:

$$\hat{\mathbf{T}}(s) = \frac{v(s)}{\underbrace{v(s)}_{=1}} = v(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

Obs att $\hat{\mathbf{T}}(s) \cdot \hat{\mathbf{T}}(s) = |\hat{\mathbf{T}}(s)|^2 = 1$

Derivera: $2 \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{T}}'(s) = 0$ ortogonala!



Enhetsnormalen: $\hat{\mathbf{N}}(s) = \frac{\hat{\mathbf{T}}'(s)}{|\hat{\mathbf{T}}'(s)|}$

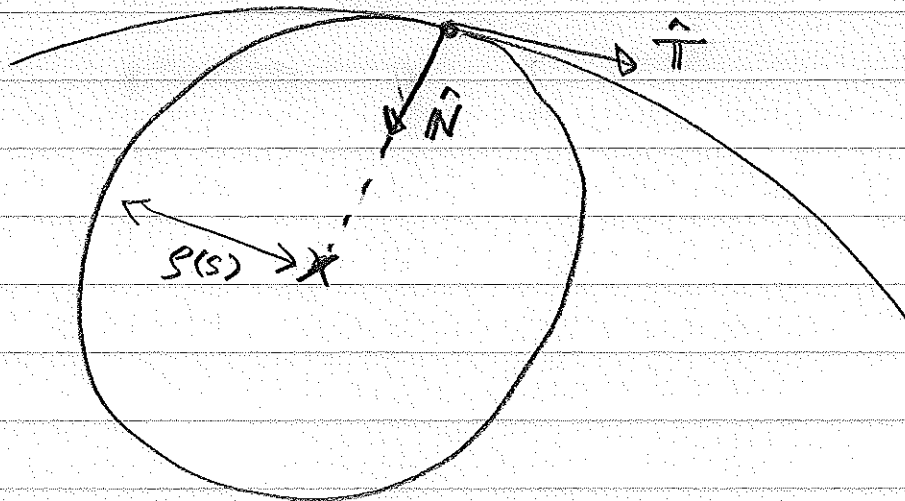
Definition 1 Kurvans krökning

är

$$\kappa(s) = \left| \frac{d\hat{T}}{ds} \right| \quad (\kappa = \text{krökning})$$

Krökningsradien är

$$\rho(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \quad (\rho = \text{rho})$$



ρ = radien i tangerande cirkel.

Båglängdsparametrisering är bra för teori, men svår att använda för beräkningar, därför att det är sällan möjligt att bestämma s .

Exempel (cirkel, radie a)

$$\mathbf{r} = a \cos\left(\frac{s}{a}\right) \hat{i} + a \sin\left(\frac{s}{a}\right) \hat{j}$$

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = -\sin\left(\frac{s}{a}\right) \hat{i} + \cos\left(\frac{s}{a}\right) \hat{j}$$

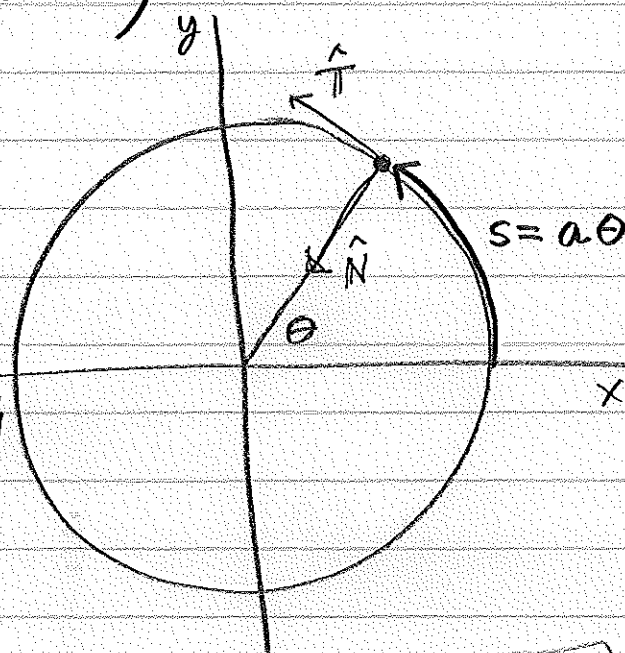
$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} &= -\frac{1}{a} \cos\left(\frac{s}{a}\right) \hat{i} - \frac{1}{a} \sin\left(\frac{s}{a}\right) \hat{j} \\ &= -\frac{1}{a^2} \mathbf{r} \end{aligned}$$

$$\kappa(s) = \left| \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} \right| = \frac{1}{a}$$

$$g(s) = a$$

$$\hat{\mathbf{N}}(s) = \frac{-\frac{1}{a^2} \mathbf{r}}{\left| -\frac{1}{a^2} \mathbf{r} \right|} = \frac{-\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = -\hat{\mathbf{r}}$$

$$\hat{\mathbf{B}}(s) = \hat{\mathbf{T}} \times \hat{\mathbf{N}} = \mathbf{k}$$



Här är det
lätt att
bestämma s .

Man kan definiera kurvans
torsion genom att beräkna
 $\frac{d\hat{\mathbf{B}}}{ds}$ (sid 648).

Vi nöjer oss med krökning.

Krökning i annan parametrisering

(Adams 11.4 sid 651 och Example 2)

Ö6
I alla parametriseringar gäller:

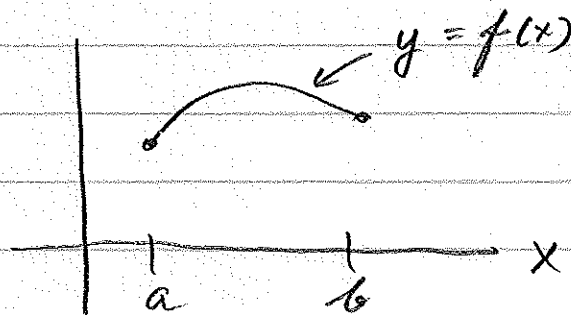
$$\mathcal{K} = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{v^3} \quad (\text{utan bevis}).$$

Exempel 2 (Graf)

$$y = f(x), \quad x \in [a, b]$$

Parametrisera med $t = x$.

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$



$$\mathbf{v} = \mathbf{i} + f'(t)\mathbf{j}, \quad v = \sqrt{1 + f'(t)^2}$$

$$\mathbf{a} = f''(t)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = f''(t)\mathbf{k}$$

$$\mathcal{K} = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{v^3} = \frac{f''(t)}{(\sqrt{1 + f'(t)^2})^{3/2}}$$

Gå tillbaka till x : $\mathcal{K}(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}.$

12.1 Funktion av flera variabler

Datorövning 1: Visualisering

$$x = [x_1, \dots, x_n]$$

$$y = f(x)$$

$$y = f(x_1, \dots, x_n)$$

$$f: D(f) \rightarrow \mathbb{R}$$

$D(f)$ = definitionsmängden, $D(f) \subset \mathbb{R}^n$
 $R(f)$ = värdemängden, $R(f) \subset \mathbb{R}$
 målmängden (target set) är $\mathbb{R}$

Det är ofta omöjligt (och onödigt) att specificera värdemängden. Därför anger vi målmängden istället.

Om 2 eller 3 variabler skriver vi ibland

$$z = f(x, y).$$

$$w = f(x, y, z)$$

(men det

Visualisering.

(8)

Kurva i rummet.

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in [a, b]$$

>> `t = linspace(0, 2);` nät i $[0, 2]$

>> `x = t;`

>> `y = t.^2;`

>> `z = t.^3;`

>> `plot3(x, y, z)`

>> `grid on`

Graf (av envariabelfunktion)

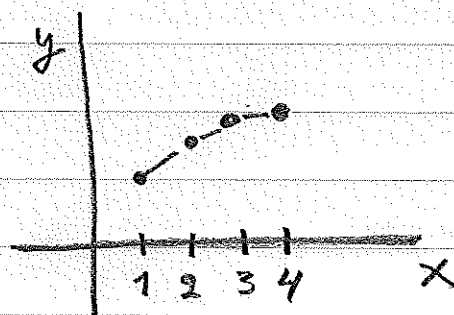
Plotta $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, i x, y -planet.

Kurva (av speciell form)

>> `x = 1:4;` nät i $[1, 4]$

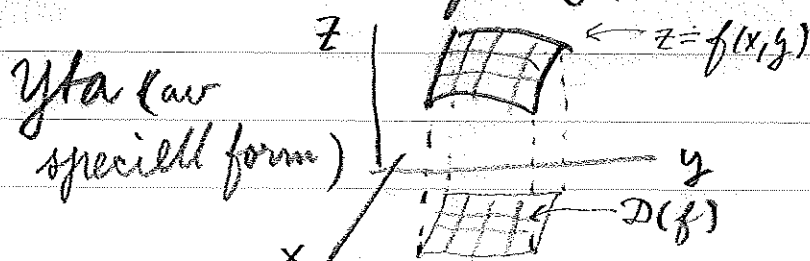
>> `y = sqrt(x);`

>> `plot(x, y)`



Graf (av tvåvariablefunktion)

Plotta $z = f(x, y)$ i x, y, z -rummet.

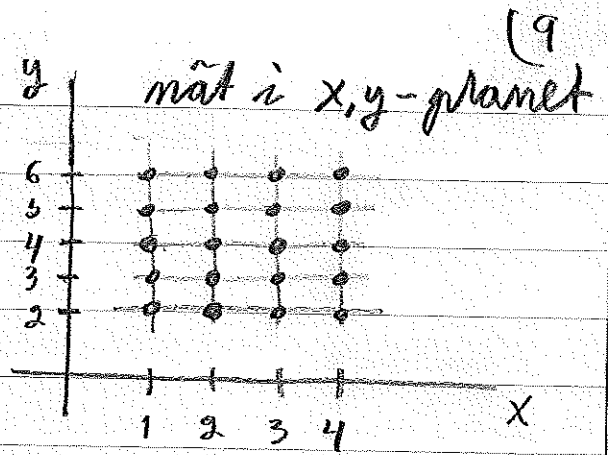


>> $x = 1:4$ (mät i x)
 >> $y = 2:6$ (mät i y)
 >> $[X, Y] = \text{meshgrid}(x, y)$

>> $Z = X .* Y.^2;$

>> $\text{mesh}(X, Y, Z)$

>> $\text{surf}(X, Y, Z)$



$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (5 \times 4)$$

(Använd $x = \text{linspace}(1, 4)$
för finare mät.)

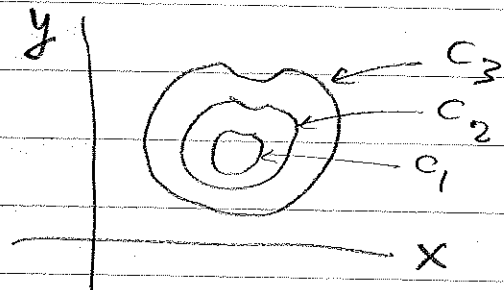
$$Y = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} \quad (5 \times 4)$$

Nivåkurvor (level curves)

Plotta $f(x, y) = C$ i x, y-planet för
flera värden på C.
Kurvor.

>> $\text{contour}(Z)$

>> $\text{surf}(Z)$



Nivåytor $f(x, y, z) = C$ plottas i rummet:

>> $[X, Y, Z] = \text{meshgrid}(x, y, z)$

>> $V = f(X, Y, Z)$

>> $\text{isosurface}(X, Y, Z, V, 0)$