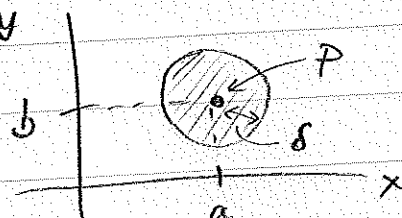


Repetera 10.1 En omgivning till

$P = (a, b)$ är en cirkelskiva (disk) med centrum i (a, b) . $\forall$



Definition 2 Vi säger att

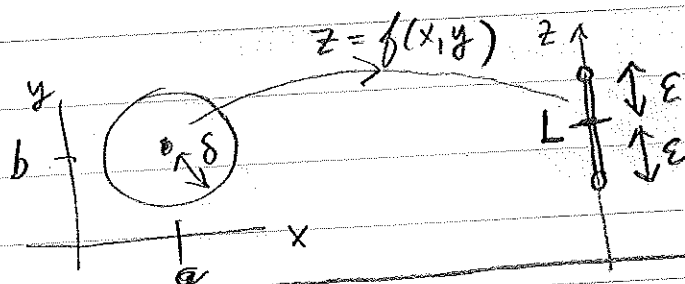
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$$

om

(i) varje omgivning av (a, b) innehåller punkter från $D(f)$ som är skilda från (a, b) ,

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ så att

$$\begin{cases} (x,y) \in D(f) \\ 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \end{cases} \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$$



Obs: (x, y) närmar sig (a, b) på alla möjliga sätt.

Exempel $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ när $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

Typ " $\frac{0}{0}$ ". $\mathcal{D}(f) = \{(x, y) \neq (0, 0)\}$

På x-axeln ($y=0$): $f(x, y) = f(x, 0) = 0 \rightarrow 0, x \rightarrow 0$

På y-axeln ($x=0$): samma

På linjen $y=x$: $f(x, y) = f(x, x) = \frac{2x^2}{2x^2} = 1, x \rightarrow 0$

Gränsvärdet $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ existerar ej.

Exempel $\lim_{(x, y) \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ Typ " $\frac{0}{0}$ ".

Vi gissar $L=0$, för "grad 3/grad 2".

Beweis $\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \underbrace{\frac{x^2}{x^2 + y^2}}_{\leq 1} |y| \leq$

$\leq |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ då $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

Definition 3 Funktionen f är

kontinuerlig i (a, b) om

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = f(a, b).$$

(Dvs om "värdet = gränsvärdet".)

12.3 Partiella derivator

(3)

Definition 4 De partiella derivatorna av $f(x, y)$ med avseende på x och y är

$$f_1(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_2(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}$$

Exempel $f(x, y) = x^3 y^2 + x$

$$f_1(x, y) = 3x^2 y + 1$$

$$f_2(x, y) = 2x^3 y$$

Beteckningar $z = f(x, y)$

$$f_1(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = D_1 f(x, y) = D_x f(x, y)$$

$$f_2(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = D_2 f(x, y) = D_y f(x, y)$$

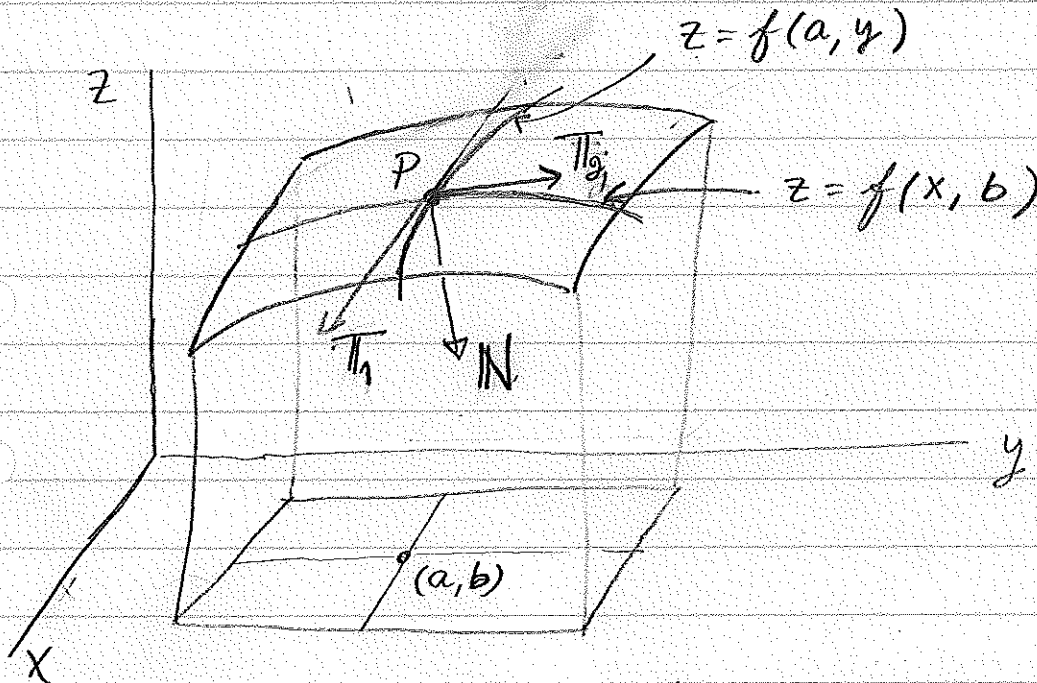
Detta är Adams beteckning. Borde ha ett "prim", dvs

$$f'_1(x, y), \quad f'_2(x, y), \quad f'_x(x, y), \quad f'_y(x, y)$$

Tangentplan och normal till graf (sid 686)

Graf: $z = f(x, y)$

$$P = (a, b, f(a, b))$$



Viktigt!!

Two curves on the surface: $z = f(x, b)$ and $z = f(a, y)$
 På parameterform:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + b\mathbf{j} + f(x, b)\mathbf{k} \quad (\text{parameter: } x)$$

$$\mathbf{r} = a\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(a, y)\mathbf{k} \quad (\text{parameter: } y)$$

Tangentvektorer i P:

$$\mathbf{T}_1 = \frac{d\mathbf{r}}{dx} = \mathbf{i} + f'_1(a, b)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}_2 = \frac{d\mathbf{r}}{dy} = \mathbf{j} + f'_2(a, b)\mathbf{k}$$

De spänner upp tangentplanet i P.
 En normalvektor ges av

(5)

$$N = T_2 \times T_1 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & f'_2(a,b) \\ 1 & 0 & f'_1(a,b) \end{vmatrix} =$$

$$= f'_1(a,b) \hat{i} + f'_2(a,b) \hat{j} - \hat{k}$$

Tangentplanets ekvation:

$$N \cdot (P - P_0) = 0$$

$$f'_1(a,b)(x-a) + f'_2(a,b)(y-b) - (z - f(a,b)) = 0$$

$$z = f(a,b) + f'_1(a,b)(x-a) + f'_2(a,b)(y-b)$$

Detta är alltså ekvationen för tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $P = (a,b,f(a,b))$.

Senare ska göra detta på annat sätt, med hjälp av gradientvektor.

12.4 Derivator av högre ordning.

Rena andra-derivator ^{av $z = f(x, y)$} med avseende på x och y :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} = f_{11}(x, y) = f_{xx}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} = f_{22}(x, y) = f_{yy}(x, y)$$

Bländade derivator med avseende på x och y :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = f_{21}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} = f_{12}(x, y) = f_{xy}(x, y)$$

Detta är beteckningar enligt Adams.

Man borde ~~også~~ beteckna derivator med "prim", dvs

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1(x, y) = f'_x(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{21}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$$

och så vidare. Så att man inte förväxlar med vektor- och matris-index, t. ex.,

$$f = (f_1, \dots, f_m)$$

Exempel $f(x, y, z) = z^2 e^{x-y}$

$$f'_1(x, y, z) = z^2 e^{x-y}$$

$$f'_2(x, y, z) = -z^2 e^{x-y}$$

$$f'_3(x, y, z) = 2z e^{x-y}$$

$$f''_{31}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} f'_3 = 2z e^{x-y}$$

$$f''_{13}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} f'_1 = 2z e^{x-y}$$

$$f'''_{133}(x, y, z) = 2e^{x-y}, \quad f'''_{313} = 2e^{x-y}$$

Obs att $f''_{31} = f''_{13}$, $f'''_{133} = f'''_{313}$ här. Det är ingen slump.

Sats 1 (Blandade derivator är lika.)

Antag att två blandade derivator av ordning n består av samma derivator i olika ordning. Om dessa är kontinuerliga i P och alla derivator av lägre ordning är kontinuerliga i en omgivning till P så är de två blandade derivatorna lika i P .

Utan bevis.

En lite enklare (men svagare) formulering:

Om alla partiella derivator till f är kontinuerliga i en omgivning till P så spelar det ingen roll i vilken ordning man beräknar de blandade partiella derivatorna.

Exempel 3 (Laplace ekvation)

Visa att $z = e^{kx} \cos(ky)$ ($k \in \mathbb{R}$)

uppfyller den partiella differential-
ekvationen (PDE)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Bevis: $\frac{\partial z}{\partial x} = k e^{kx} \cos(ky)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = k^2 e^{kx} \cos(ky)$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -k e^{kx} \sin(ky), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -k^2 e^{kx} \cos(ky)$$

så att

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = k^2 e^{kx} \cos(ky) - k^2 e^{kx} \cos(ky) = 0$$

Exempel 4 (Vågekvationen)

(9)

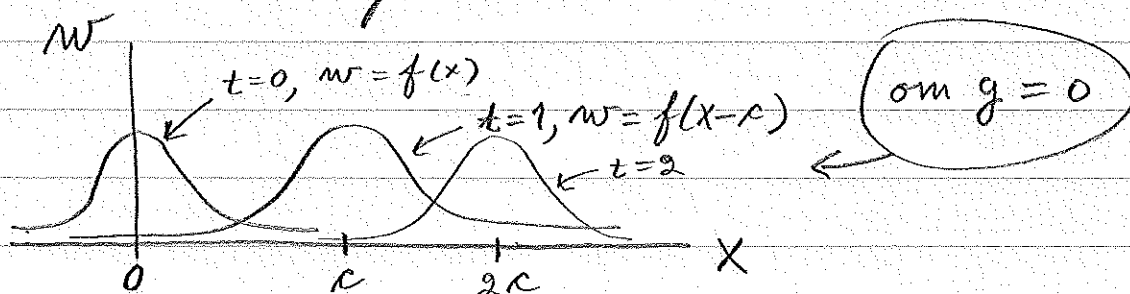
Funktionen

$$w = f(x - ct) + g(x + ct)$$

uppfyller PDE:n

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Här betyder termen $f(x - ct)$ en våg som rör sig åt höger med hastigheten c .



Termen $g(x + ct)$ är en våg som rör sig åt vänster.