

12.5 Hedjeregeln (endast sid 695-698 + example 10) sid 702

En partikel rör sig på en yta
(en yttre funktion)

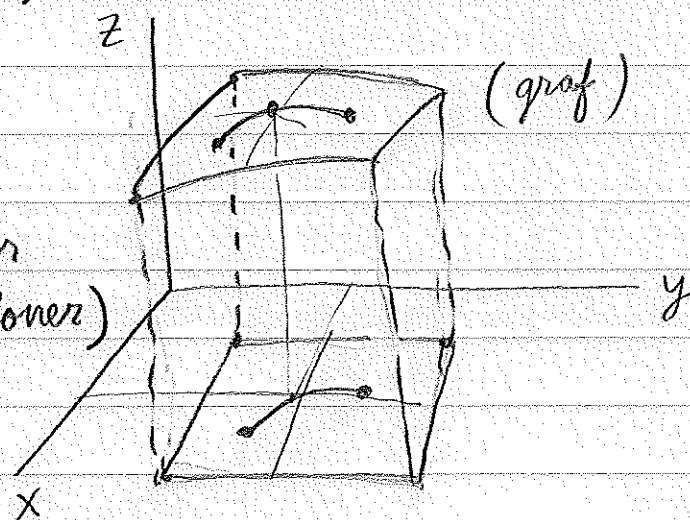
$$z = f(x, y).$$

Om partikelns

x, y -koordinater

är (två inre funktioner)

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}$$



så är höjden vid tiden t
(sammansatt funktion)

$$z = f(u(t), v(t)) = g(t).$$

Höjdändringen per tidsenhet blir

$$\frac{dz}{dt} = g'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u(t+h), v(t+h)) - f(u(t), v(t))}{h}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = u(t+h) - u(t) \\ \Delta v = v(t+h) - v(t) \end{array} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u(t) + \Delta u, v(t) + \Delta v) - f(u(t), v(t))}{\Delta u} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \\
&\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(u(t), v(t) + \Delta v) - f(u(t), v(t))}{\Delta v} \frac{v(t+h) - v(t)}{h}
\end{aligned}$$

Det verkar som om gränsvärdet blir

$$g'(t) = \frac{d}{dt} f(u(t), v(t)) = f'_1(u(t), v(t)) u'(t) + f'_2(u(t), v(t)) v'(t)$$

Kan också skrivas

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

På matrisform:

$$\frac{d}{dt} f(u(t), v(t)) = \begin{bmatrix} f'_1(u(t), v(t)) & f'_2(u(t), v(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix}$$

eller

$$\frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix}$$

Obs att de partiella derivatorna $f'_1(u, v)$, $f'_2(u, v)$ bildar en radvektor medan de ordinära derivatorna $u'(t)$, $v'(t)$ bildar en kolonnvektor.

En annan version av kedjeregeln.

$$z = f(x, y), \quad x = u(s, t), \quad y = v(s, t)$$

$$z = f(u(s, t), v(s, t)) = g(s, t)$$

$$\begin{cases} g'_1(s, t) = \frac{\partial}{\partial s} g(s, t) = f'_1(u(s, t), v(s, t)) u'_1(s, t) + f'_2(u(s, t), v(s, t)) v'_1(s, t) \\ g'_2(s, t) = \frac{\partial}{\partial t} g(s, t) = f'_1(u(s, t), v(s, t)) u'_2(s, t) + f'_2(u(s, t), v(s, t)) v'_2(s, t) \end{cases}$$

eller

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \end{cases}$$

På matrisform:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix}$$

Fler versioner är möjliga beroende på hur många variabler som man har. Mer om det i Fö 2.2.

I beviset räcker det inte att f är partiellt deriverbar. Den måste vara deriverbar (på riktigt). Vad är det?

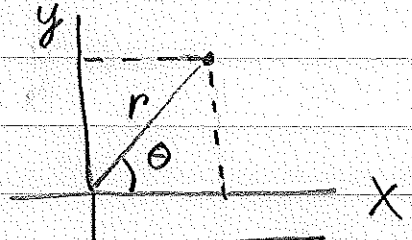
Exempel 10 Laplaces ekvation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

i polära koordinater.

Antag $z = f(x, y)$ och inför
polära koordinater y

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$


$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

Visa att

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Bewis. Vi beräknar vänsterledet med
kedjeregeln.

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial z}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial z}{\partial y}$$

$\theta = \text{konstant}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial r} \stackrel{\theta = \text{konstant}}{=} \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial y} =$$

$$= \cos \theta \left(\cos \theta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \sin \theta \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right)$$

$$+ \sin \theta \left(\cos \theta \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \sin \theta \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

$$= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial z}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial z}{\partial y}$$

$r = \text{konstant}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \stackrel{!}{=} -r \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial z}{\partial x} \right) + r \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

$$= -r \cos \theta \frac{\partial z}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial z}{\partial y} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$= -r \frac{\partial z}{\partial r} - r \sin \theta \left(-r \sin \theta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + r \cos \theta \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right) + r \cos \theta \left(-r \sin \theta \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + r \cos \theta \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

$$= -r \frac{\partial z}{\partial r} + r^2 \left(\sin^2 \theta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

Alltså:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Att kunna räkna med polära koordinater är mycket viktigt.

I öoning 12.5:24 görs detta på ett annat sätt.

12.6 Deriverbarhet

(endast sid 705-711, Sats 34, 5 utan bevis)

Kedjeregeln:

$$\frac{d}{dt} f(u(t), v(t)) = f'_1(u(t), v(t)) u'(t) + f'_2(u(t), v(t)) v'(t)$$

Det räcker inte att f är partiellt
deriverbar, dvs att partiella derivatorna
existerar, utan den måste vara
deriverbar.

Vad betyder det?

Kom ihåg ordinär derivata
 (för en-variabelfunktion)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

dvs

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} = 0$$

Med $x = a+h$, $h = x-a$ har vi
 linjärseringen av f i a :

$$L(x) = f(a) + f'(a)h = f(a) + f'(a)(x-a)$$

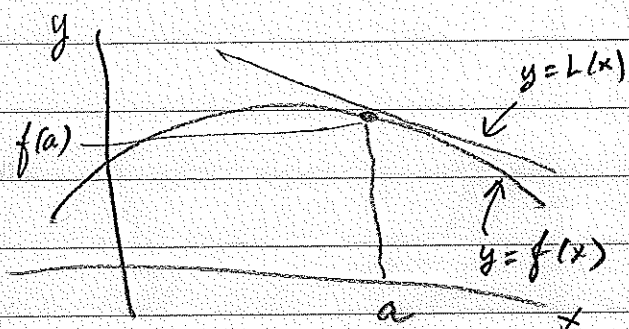
Ekvationen $y = L(x)$

dvs $y = f(a) + f'(a)(x-a)$

är tangentlinjen till grafen $y = f(x)$.
i punkten $(a, f(a))$.

Linjär approximation: $f(a)$

$f(x) \approx L(x)$ om $x \approx a$.



Two variabelfunktion: med
 $x = a + h$, $y = b + k$ är linjäriseringar
av $f(x, y)$ i (a, b)

$$L(x, y) = f(a, b) + f'_1(a, b)h + f'_2(a, b)k$$

$$= f(a, b) + f'_1(a, b)(x-a) + f'_2(a, b)(y-b).$$

Ekv. $z = L(x, y)$ är ekv. för
tangentplanet till grafen $z = f(x, y)$.

(se sid 687, Fö 1.3)

Om detta ska gälla måste linjäriseringen
vara en bra approximation till f
nära (a, b) : $f(x, y) \approx L(x, y)$, om $(x, y) \approx (a, b)$.

Def 5 Funktionen $f(x, y)$ är
deriverbar ("differentiable")

i (a, b) om

$$\lim_{\sqrt{h^2+k^2} \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - f'_1(a, b)h - f'_2(a, b)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Sats 4 Om de partiella derivatorna
 är kontinuerliga i omgivning till (a, b)
 så är f deriverbar.

Sats 5 Om den yttre funktionen
 är deriverbar och den inre funktionen
 är partiellt deriverbar så gäller
 kedjeregeln.

Obs: * f deriverbar i $(a, b) \Rightarrow f$ är kontinuerlig i (a, b)

* f deriverbar i $(a, b) \Rightarrow f$ är partiellt deriverbar