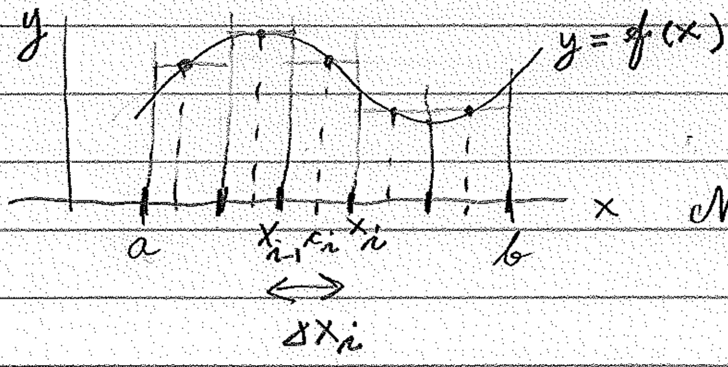
FÖ 4.3

Idag: Dubbelintegralen 14.1, 14.2, 14.3

Kom ihåg enkelintegralen:



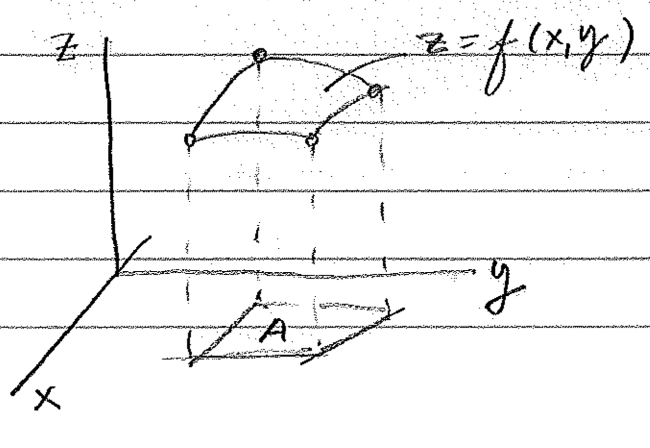
Nät (partition) x_i

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{m} f(c_i)\,\Delta x_i \quad \text{(Riemann-summa)}$$

$= \text{arean under grafen om } f(x) \geq 0.$

Vi ska nu definiera dubbelintegralen:

$\iint_A f\,dA = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ = volymen under grafen om $f(x,y) \geq 0$.



Först med en rektangel $A = R = [a,b] \times [c,d]$

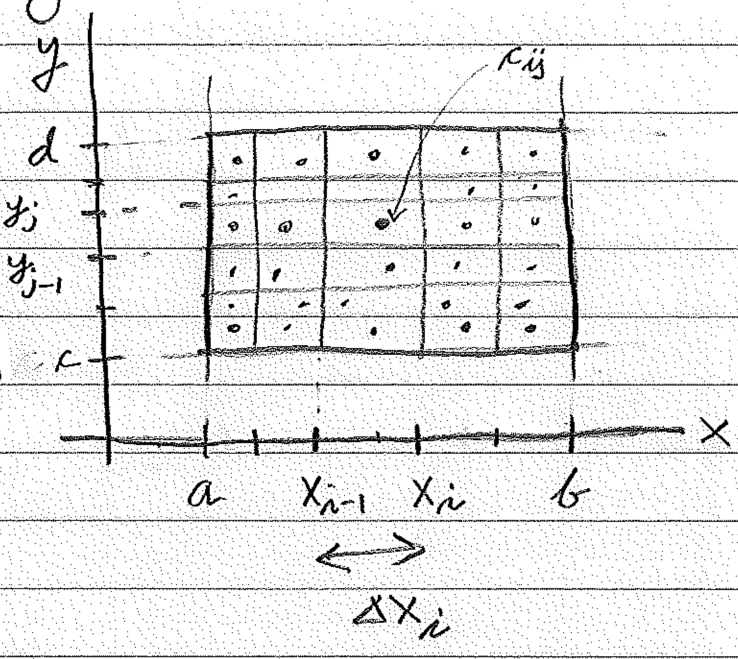
Nät (partition) P:

x_i, y_j,

Urvalspunkter $c_{ij} \in R_{ij}$.

Rektanglar $R_{ij} = [x_i, x_j] \times [y_{j-1}, y_j]$

$\|P\| = \max \operatorname{diam}(R_{ij})$



Riemann-summa:

$$R_s(f, P) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \underbrace{f(c_{ij})}_{\text{höjd}} \underbrace{\Delta x_i \, \Delta y_j}_{\text{area} = \Delta A_{ij}}$$

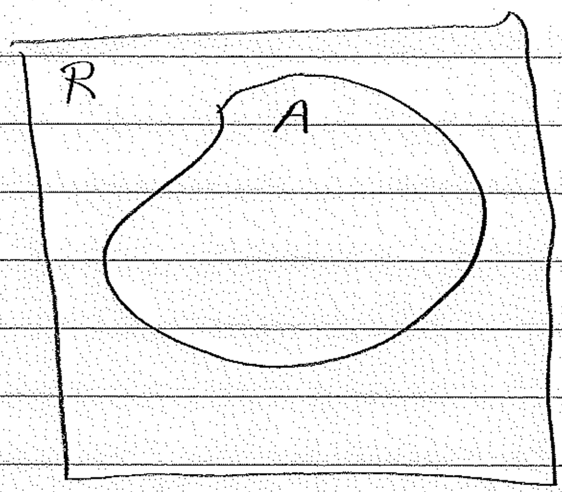
<u>Definition:</u> Funktionen f är integrerbar över rektangeln R med dubbelintegralen

$$I = \iint_R f(x,y)\, dx\, dy = \iint_R f \, dA$$

om gränsvärdet $\lim_{\|P\| \to 0} R_s(f, P) = I$

existerar för alla val av c_{ij}.

Begränsat område A.



Tag stor rektangel R så att $A \subset R$ och integrera

$$f_A(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{i } A \\ 0 & \text{utanför } A \end{cases}$$

$$\iint_A f \, dA = \iint_R f_A \, dA$$

Man kan visa att om f är kontinuerlig och begränsad på begränsat område A så existerar $\iint_A f \, dA$.

Egenskaper

a) $\text{area}(A) = \iint_A 1\, dA$

b) $\iint_A f\, dA$ = volymen under grafen $z = f(x,y)$ om $f(x,y) \geq 0$.

c) Linjärkombination bevaras:

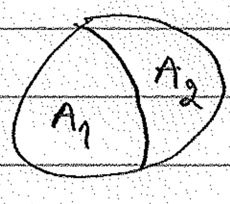
$$\iint_A \big(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\big)\, dx\,dy =$$

$$= \alpha \iint_A f(x,y)\, dx\,dy + \beta \iint_A g(x,y)\, dx\,dy$$

d) Olikhet bevaras:

$$g(x,y) \leq f(x,y) \Rightarrow \iint_A g\, dA \leq \iint_A f\, dA$$

e) $A = A_1 \cup A_2$ utan överlapp



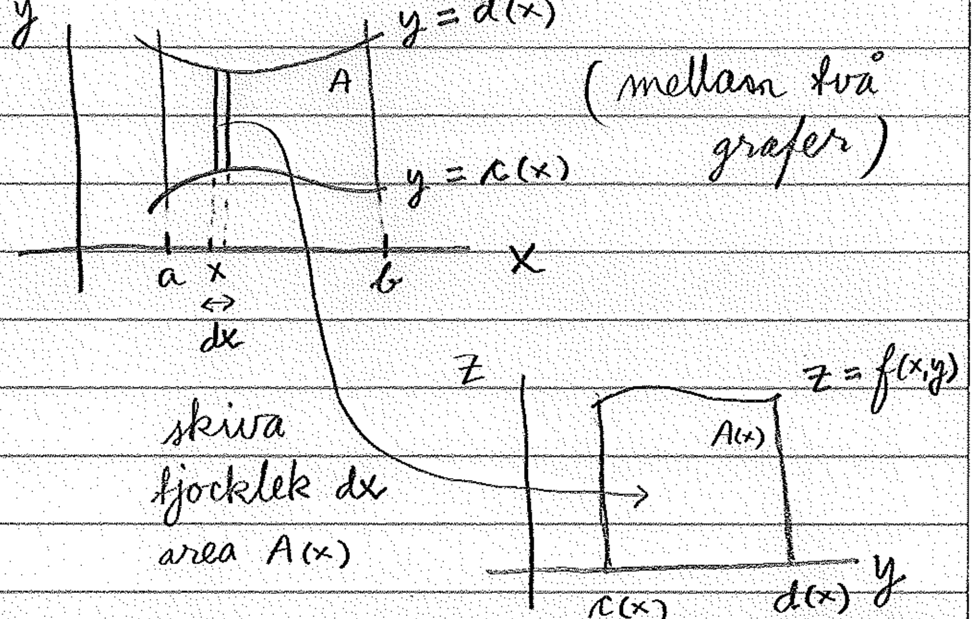
$$\iint_{A_1 \cup A_2} f\, dA = \iint_{A_1} f\, dA + \iint_{A_2} f\, dA$$

Beräkning av integralen med upprepad integration.

Fungerar om A är <u>enkelt</u> i x eller y.

<u>Enkelt i y:</u>

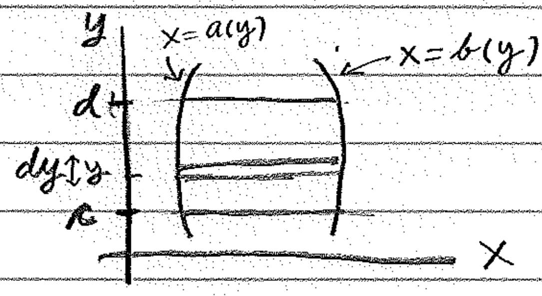
(mellan två grafer)



$$\iint_A f\,dA = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

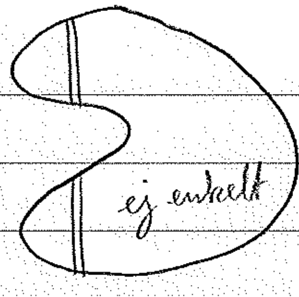
$$= \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

<u>Enkelt i x:</u>

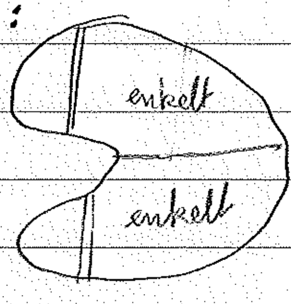


$$\iint_A f\,dA = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

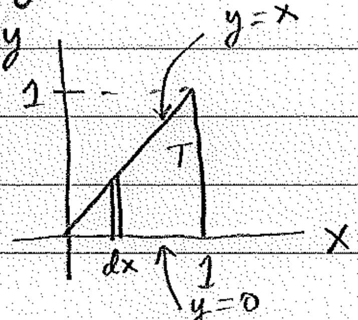
Ej enkelt:



Dela upp:



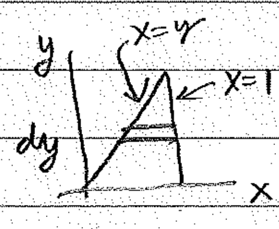
<u>Exempel</u> Beräkna $\iint_T xy\,dx\,dy$



Triangeln T är både enkel i x och y.

a) $\iint_T xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^x xy\,dy \right) dx = \int_0^1 x \int_0^x y\,dy\,dx$

$= \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{x} dx = \int_0^1 \frac{x^3}{2}\,dx = \frac{1}{8}$



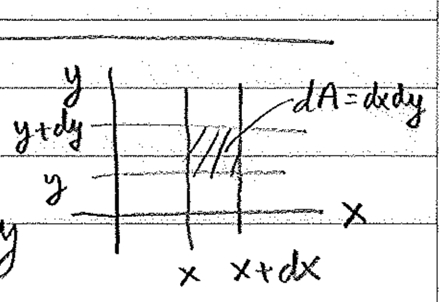
b) $\iint_T xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_y^1 xy\,dx \right) dy =$

$= \int_0^1 y \int_y^1 x\,dx\,dy = \ldots = \frac{1}{8}$

Matlab: nästa sida

Area-element: $dA = dx\,dy$

Integralen: $\iint_A f\,dA = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$



Example Lecture 4.3

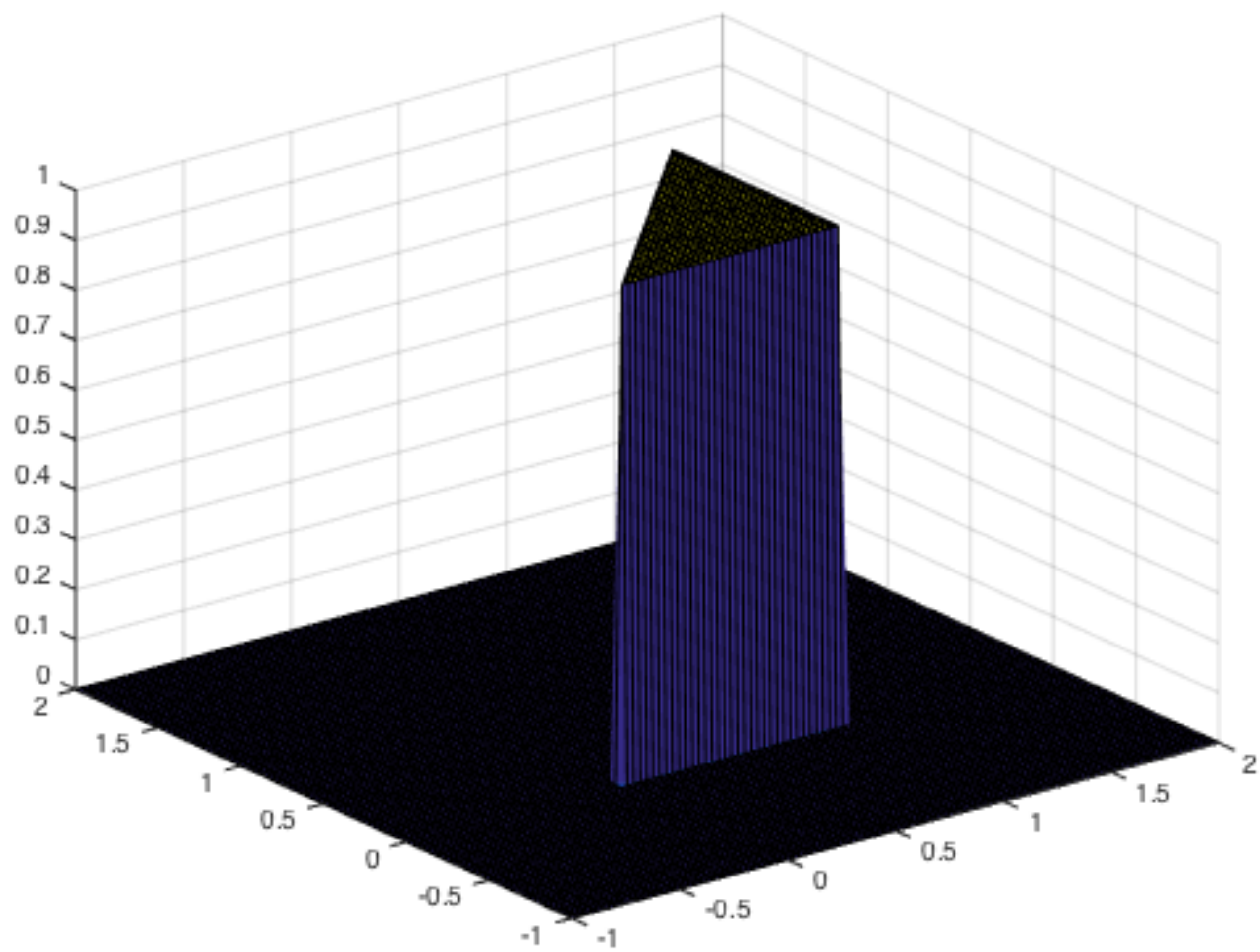
Integral of xy over triangle

Contents

Cut-off function

The function T is a boolean function, which is =1 (true) on the triangle and =0 (false) outside the triangle.

```
T=@(x,y) (0<=x).*(x<=1).*(0<=y).*(y<=x);

x=linspace(-1,2); [X,Y]=meshgrid(x,x); Z=T(X,Y);
surfc(X,Y,Z)
```



Computation of the integral

```
f=@(x,y)  (x.*y);            % the integrand
fT=@(x,y) (f(x,y).*T(x,y)); % the cut-off integrand
I=integral2(fT,0,1,0,1)      % integration over rectangle
```

```
Warning: Reached the maximum number of
```

```
function evaluations (10000). The result
fails the global error test.

I =

    0.1250
```

Computation of the integral

The function T is unnecessarily complicated.
This is enough:

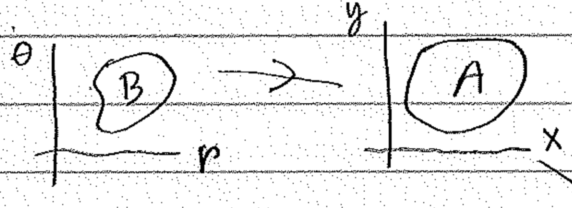
```
T=@(x,y)  (y<=x);
f=@(x,y)  (x.*y);              % the integrand
fT=@(x,y) (f(x,y).*T(x,y)); % the cut-off integrand
I=integral2(fT,0,1,0,1)     % integration over rectangle
```

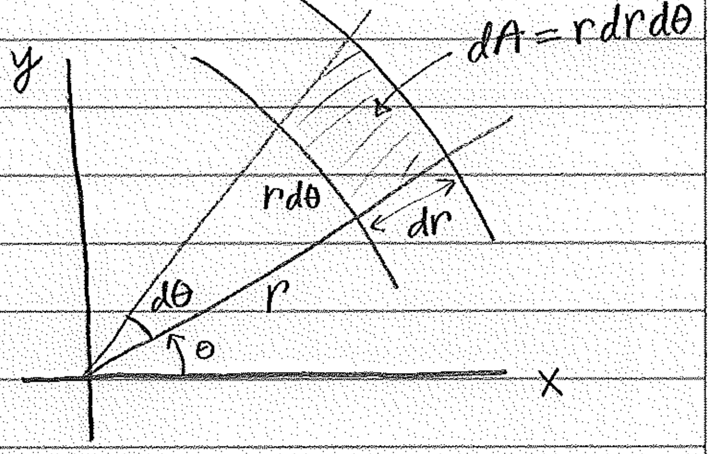
```
Warning: Reached the maximum number of
function evaluations (10000). The result
fails the global error test.

I =

    0.1250
```

Published with MATLAB® R2014b

Polära koordinater (r,θ).

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$





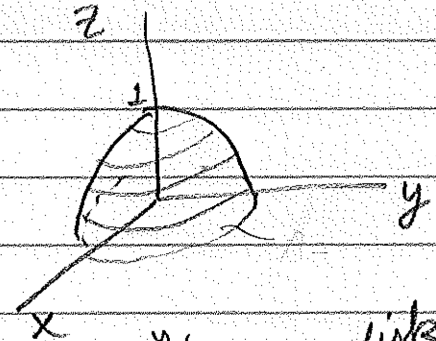
$$dA = r\,dr\,d\theta$$

$$\iint_A f\,dA = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_B f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

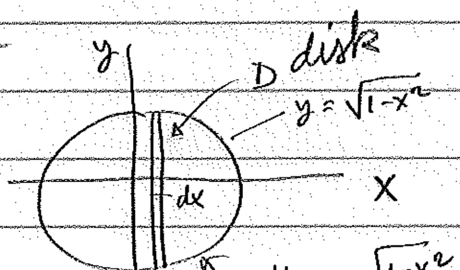
Exempel Volymen under grafen

$$z = 1 - x^2 - y^2.$$



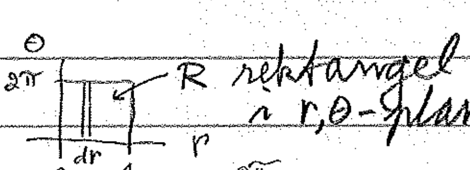
$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\,dy \right) dx$$



Mycket svår!

Polära koordinater:



$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\,dx\,dy = \iint_R (1 - r^2)\,r\,dr\,d\theta = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (1-r^2)\,r\,d\theta \right) dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r^2)\,r\,dr = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

" 3.3 (gamla 98)

14.3 • Generaliserad dubbelintegral.
(improper)

• Medelvärdessatsen

Integralen $\iint_D f(x,y)\,dA$ är definierad om f är kontinuerlig och begränsad och D är ett begränsat område.

Dvs om både f och D "håller sig borta från oändligheten".

Om någon av dem är obegränsad så säger vi att $\iint_D f(x,y)\,dA$

är generaliserad (improper).

En sådan kan vara konvergent eller divergent.

Positiv integrand $f(x,y) \geq 0$.

Om integranden $f(x,y) \geq 0$

så är integralen antingen

konvergent: $\iint\limits_D f(x,y)\,dA = I$

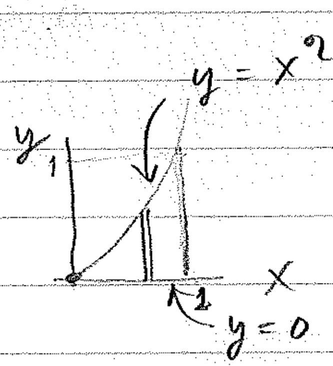
eller **divergent mot ∞**:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dA = \infty .$$

- Då kan man avgöra konvergens/divergens genom upprepad integration.
- Om $f(x,y)$ har både pos. och negativa värden så funkar inte detta: $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ och $\iint\limits_D f(x,y)\,dy\,dx$ kan ge olika resultat.

exempel 3

$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}$$

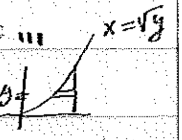


$$f(x,y) = \frac{1}{(x+y)^2} \geq 0$$

$$f(x,y) \to \infty \text{ då } (x,y) \to (0,0)$$

$$\iint_D \frac{1}{(x+y)^2}\,dA = \int_0^1\left(\int_0^{x^2} \frac{1}{(x+y)^2}\,dy\right)dx =$$

$$\boxed{\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{1}{(x+y)^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\frac{-1}{x+y}\right]_{\sqrt{y}}^1 dy = \ldots}$$



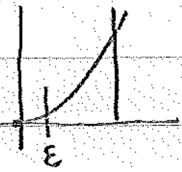
$$= \int_0^1 \left[\frac{-1}{x+y}\right]_{y=0}^{y=x^2} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+x^2}\right) dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \Big[\ln(1+x)\Big]_{x=0}^{1} = \ln 2.$$

Konvergent. Egentligen borde vi räkna så här:

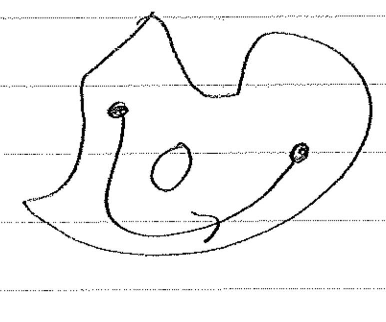
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \int_0^{x^2} \frac{1}{(x+y)^2}\,dy\,dx$$

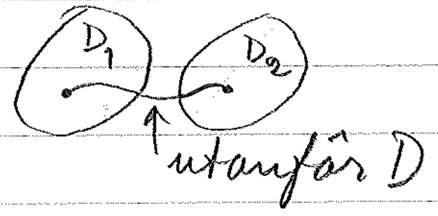


Medelvärden

D är sammanhängande (connected) om två godtyckliga punkter i D alltid kan förbindas med en kurva i D.

$D = D_1 \cup D_2$





(Medelvärdessats för integral)

Sats 3 Antag: * D slutet, begränsat, och sammanhängande område

* f kont. i D

Då finns punkt $(x_0, y_0) \in D$ sådan att

$$\iint_D f(x,y)\,dA = f(x_0,y_0)\cdot \text{area}(D)$$

Utan bevis.

Dividera med arean:

$$f(x_0,y_0) = \frac{1}{\text{area}(D)} \iint_D f(x,y)\,dA =$$

$$= \text{medelvärdet av } f \text{ över } D.$$

Dvs f kan inte hoppa över sitt medelvärde.