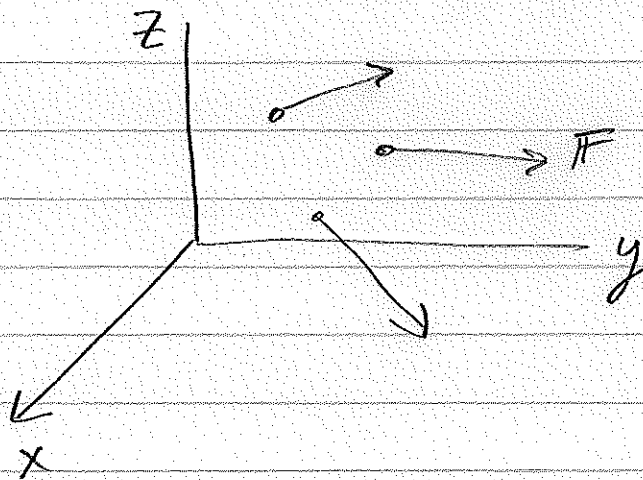


Vektorfält (15.1, sid 859-862)Vektorfält i rummet:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}$$

(I varje punkt sitter en pil.)



Skalarfält $f(x, y, z)$ (I varje punkt ett tal.)

Exempel • hastighetsfält i strömning
 $v(x, y, z) \left[\frac{m}{s} \right]$

• temperaturgradient

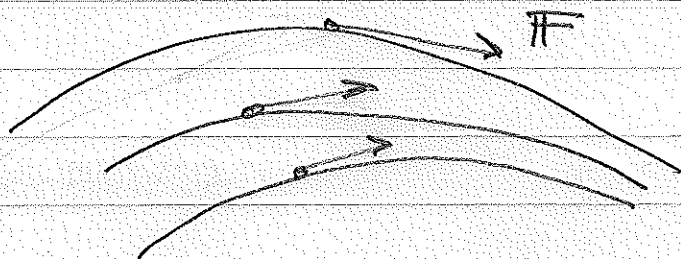
$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{k} \quad \left[\frac{K}{m} \right]$$

• kraftfält $\mathbf{F}(x, y, z) [N]$, $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$
 tyngdkraftsfältet

2

Fältlinjer (strömlinjer, kraftlinjer, ...)

är kurvor sådana att $F(x, y, z)$ är tangent till den kurvan som går genom (x, y, z) .



Sådana kurva $r = r(t)$ ges av

$$\frac{dr}{dt} = \lambda(t) F(r(t))$$

(Genom att välja $\lambda(t)$ kan vi ändra farten av partikeln som rör sig längs kurvan.)

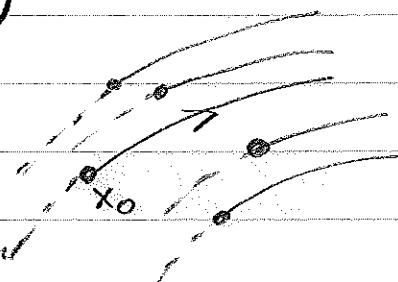
Detta är ett system av ODE.

Löses med Matlab:

>> $F = @(t,x) (\text{lambda}(t) * [F1(x); F2(x); F3(x)])$

>> $[t,x] = \text{ode23}(F, [0,T], X0)$

>> $\text{plot3}(t,x)$



Löser begynnelsevärdesproblem (framåt).

en annan metod är att eliminera t :

(3)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda(t) F_1(x(t), y(t), z(t)) \\ \frac{dy}{dt} = \lambda(t) F_2(x(t), y(t), z(t)) \\ \frac{dz}{dt} = \lambda(t) F_3(x(t), y(t), z(t)) \end{cases}$$

$$\lambda(t) dt = \frac{dx}{F_1(x, y, z)} = \frac{dy}{F_2(x, y, z)} = \frac{dz}{F_3(x, y, z)}$$

dvs $\frac{dx}{F_1(x, y, z)} = \frac{dy}{F_2(x, y, z)} = \frac{dz}{F_3(x, y, z)}$

Island, om kan separera variablerna,

dvs skriva på formen

$$P(x) dx = Q(y) dy = R(z) dz$$

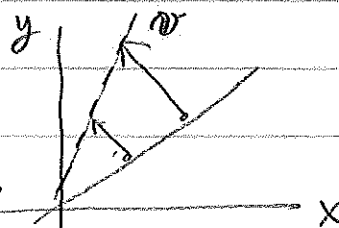
så kan man lösa genom att integrera.

Exempel $\vec{v}(x, y) = \Omega (-y \hat{i} + x \hat{j}) \left[\frac{m}{s} \right] \left(\frac{\Omega > 0}{[1/s]} \right)$

Obs att $|\vec{v}| = |\vec{v}| = \Omega \sqrt{y^2 + x^2} = \Omega r$

$$\vec{v} \cdot \vec{r} = 0$$

Hastighetsfältet för stilkroppens rotation med vinkelhastighet $\Omega [1/s]$.



Strömlinjerna ges av

$$\frac{dx}{-2y} = \frac{dy}{-2x} \quad \text{dvs} \quad \frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}.$$

Separera variablerna:

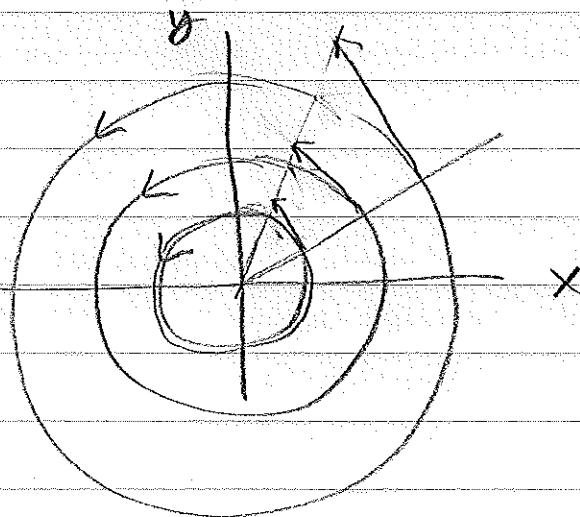
$$x dx = -y dy$$

Integrera: $\int x dx = -\int y dy$

$$\frac{1}{2} x^2 = -\frac{1}{2} y^2 + C$$

$$x^2 + y^2 = 2C$$

Cirklar med centrum i origo.



Konservativa fält (15.2 sid 866-868) ⁽⁵⁾

Definition

Om $F = \nabla\phi$ i området D så är

F ett konservativt fält i D och

funktionen ϕ kallas potential

till F i D .

(I mekanik och ellära skrivs

$F = -\overset{\text{obs!}}{\nabla}\phi$, så att kraften F pekar
dit potentialen ϕ minskar.)

Exempel Tyngdkraftfältet

$$F(x, y, z) = -mg \mathbf{k} = -\nabla\phi(x, y, z) \quad \begin{array}{c} \circ m \\ \downarrow mg \mathbf{k} \end{array}$$

$$\phi(x, y, z) = -mgz$$

(I mekanik: $\phi(x, y, z) = +mgz$)

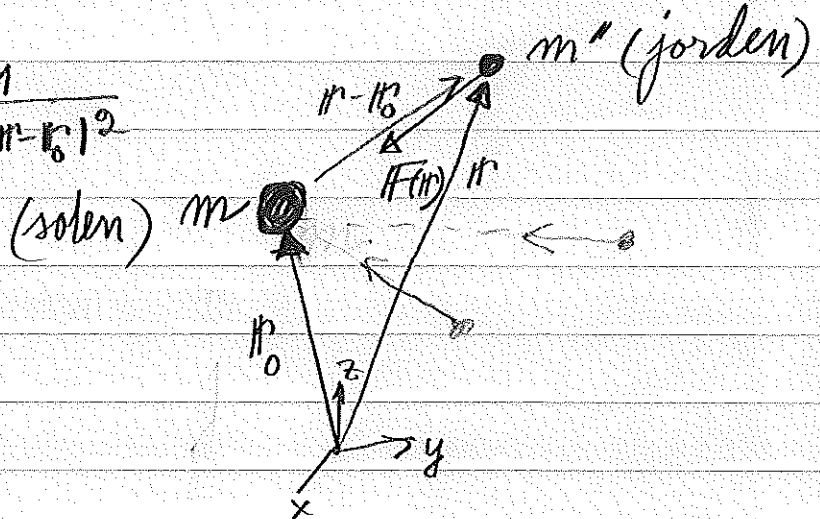
$$\text{Potentialen ges av ekv} \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = -mg \end{cases}$$

Exempel Gravitationsfältet

(6)

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -Gmm' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}$$

Obs: $|\mathbf{F}(\mathbf{r})| = Gmm' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}$



Potentialen är

$$\phi(\mathbf{r}) = Gmm' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

Bewis Vi beräknar $\nabla\phi$.

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = Gmm' \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = Gmm' \frac{-1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} \frac{\partial}{\partial x} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$$

$$\begin{aligned} \text{Här är } \frac{\partial}{\partial x} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| &= \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\dots}} \cdot 2(x-x_0) = \frac{x-x_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \end{aligned}$$

så att

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = -Gmm' \frac{x-x_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} = F_1.$$

På samma vis: $\frac{\partial\phi}{\partial y} = F_2$, $\frac{\partial\phi}{\partial z} = F_3$.

hur testa om $\mathbb{F}$ är konservativt?

Nödvändigt villkor för att $\mathbb{F}$ ska vara konservativt i D .

(7a)

Antag att $\mathbb{F}$ är konservativt, dvs $\mathbb{F} = \nabla \phi$.

Då gäller $\frac{\partial}{\partial y} F_1 = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}$

$$\frac{\partial}{\partial x} F_2 = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

Men $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$, så att

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \quad \text{i } D.$$

På samma vis:

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y} \quad \text{i } D.$$

Dessa villkor är nödvändiga men inte tillräckliga. Vi ska se i 16.2

Sats 4 att vi måste lägga ett villkor på D också, för att garantera att $\mathbb{F}$ är konservativt i D .

Om potentialen finns kan den bestämmas genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = F_1 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = F_2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = F_3 \end{cases}$$

Exempel $\mathbf{v}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = -1 \neq \frac{\partial v_2}{\partial x} = 1$$

$\mathbf{v}$ ej konservativt.

Exempel $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x}$

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = x \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = y \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + f(y, z) \\ \phi(x, y, z) = \frac{1}{2}y^2 + h(x, z) \\ \phi(x, y, z) = k(x, y) \end{cases}$$

Välj $f(y, z) = \frac{1}{2}y^2 + C$, $h(x, z) = \frac{1}{2}x^2 + C$, $k(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + C$

Då fås $\phi(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C$.

Kurvintegralen 15.3

(8)

Kurva på parameterform:

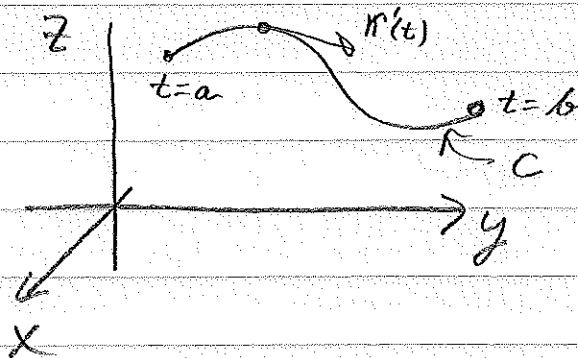
$$C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad t \in I = [a, b]$$

Kom ihåg båglängdselementet

$$ds = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

Kurvintegralen av f längs C är

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt$$

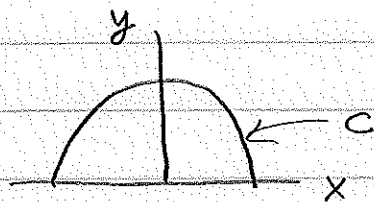


Exempel Massan av en tråd med variabel densitet $\delta(x, y, z) \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}} \right]$:

$$M = \int_C \delta ds = \int_a^b \delta(x(t), y(t), z(t)) \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt \quad [\text{kg}]$$

$\underbrace{\quad}_{ds} dm = \delta ds$

Exempel $I = \int_C y \, ds$ där C är övre halvcirkeln.



1) Parametrisera kurvan:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, \pi]$$



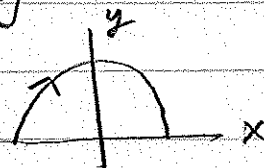
Tangent: $\frac{dr}{dt} = -\sin(t) \mathbf{i} + \cos(t) \mathbf{j}$, $|\frac{dr}{dt}| = 1$

Båglängdselementet: $ds = |\frac{dr}{dt}| dt = dt$

Integralen: $I = \int_C y \, ds = \int_0^\pi \sin(t) \, dt = 2$

2) En annan parametrisering:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}, \quad t \in [-1, 1]$$



Tangent: $\frac{dr}{dt} = \mathbf{i} - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \mathbf{j}$, $|\frac{dr}{dt}| = \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

$$ds = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$I = \int_C y \, ds = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_{-1}^1 dt = 2$$

Viktigt: $\int_c f ds = \int_a^b f(r(t)) \left| \frac{dr}{dt} \right| dt$

(10)

beror ej på valet av parametrisering
dvs alla parametriseringar av c ger
samma resultat. Vi bevisar inte
detta, men vi såg att det
stämde i förra exemplet.

Kurvan c och $\int_c f ds$ har ingen
riktning i sig själv.

Men när vi valt en
parametrisering så genomlöps
kurvan i en viss riktning
som bestäms av parametriseringen.

Även farten bestäms av
parametriseringen.