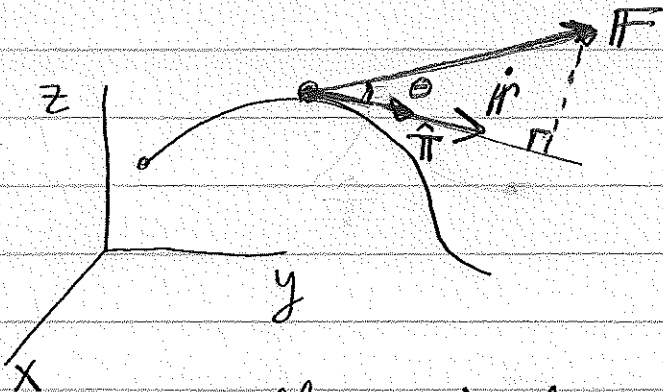


Tangentkurvintegralen 15.4

Kom ihåg kurvintegralen
av skalärt fält f :

$$\begin{aligned}\int_C f \, ds &= \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt\end{aligned}$$



(tangenten $\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$)

Tangentkurvintegralen av vektor-
fält $\mathbf{F}$:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$$

Obs att

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \underbrace{\frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|}}_{=\hat{\mathbf{T}}(t)} \underbrace{|\dot{\mathbf{r}}(t)| dt}_{=ds}$$

enhetstangenten

$$= \int_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} ds$$

där $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}}$ är skalära projektionen av $\mathbf{F}$ på tangentriktningen dvs tangentkomponenten av $\mathbf{F}$.

Vektorbåglängdselementet:

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \hat{\mathbf{T}} ds$$

Exempel (Arbete) $\mathbf{F}$ kraftfält [N].

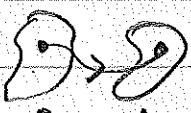
Arbetet som uträttas då en partikel rör sig längs C i fältet $\mathbf{F}$ är

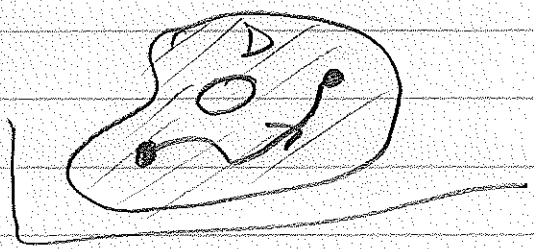
$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} ds. \quad [\text{Nm}]$$

C är sluten: 

C är enkelt = korsar inte sig själv

D är ett sammanhängande ^(connected) område om varje par av punkter kan förbindas med en kurva i D .

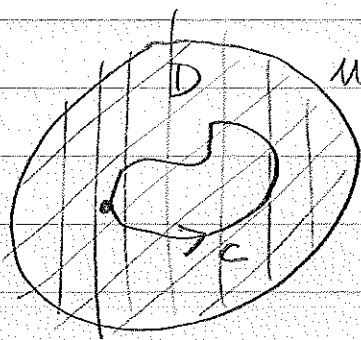
Ej sammanhängande: 
två delar



D är enkelt sammanhängande (simply connected) om varje enkelt sluten kurva C i D kan krympas kontinuerligt till en punkt utan att lämna D .
Då finns en yta i D vars rand är C .

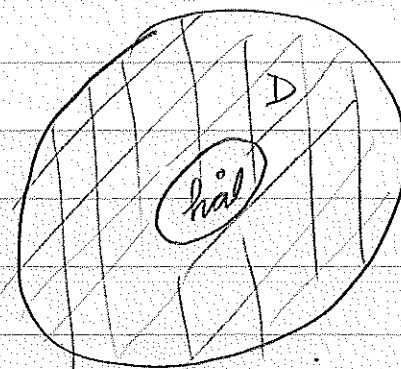
Exempel

I planet:



utan hål

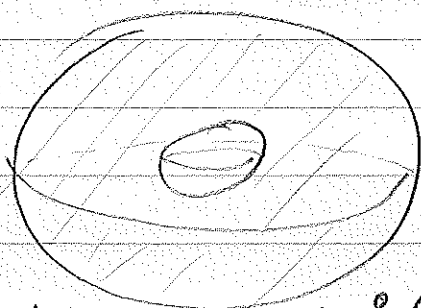
enkelt s.h.



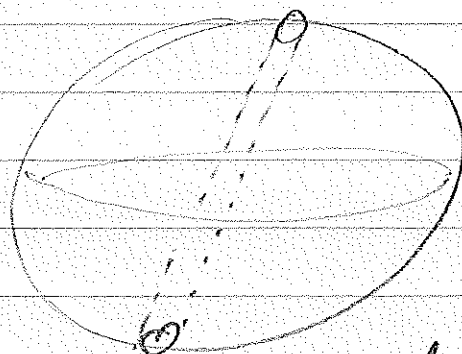
skiva
med hål

ej enkelt s.h.

I rummet:



klot med hål
enkelt s.h.



genomborrat klot
ej enkelt s.h.

Typiskt: D definitionsmängd,
hål i D är de punkter
där F ej deriverbar.

ex. $F(x) = \frac{1}{|x|}$, $D = \{x \neq 0\}$
hål i origo.

Sats 1 (oberoende av vägen)

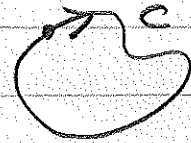
(5)

Antag F deriverbar i ett
sammenhängande område D .

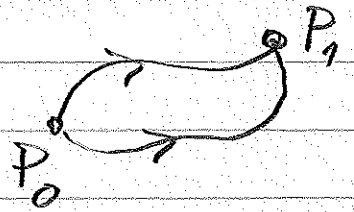
Då är följande påståenden
ekvivalenta

(a) F är konservativt i D

(b) $\int_C F \cdot dr = 0$ för varje sluten
kurva i D .



(c) $\int_C F \cdot dr$ har samma värde
för alla c i D som
går från P_0 till P_1 .



Beweis Vi bevisar bara $(a) \Rightarrow (c)$. (6)

Antag då att F är konservativt
dvs $F = \nabla \phi$ i D .

Tag en kurva C från P_0 till P_1 .

Då blir

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \nabla \phi(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \\ &= \{ \text{kedjeregeln} \} = \int_a^b \frac{d}{dt} \phi(\mathbf{r}(t)) dt = \\ &= \left[\phi(\mathbf{r}(t)) \right]_a^b = \phi(P_1) - \phi(P_0), \end{aligned}$$

dvs integralen beror av P_1 och P_0
men inte C .

Obs: Arbetet av konservativt
fält är lika med ändringen av
potentialen:

$$W = \int_C F \cdot d\mathbf{r} = \phi(P_1) - \phi(P_0).$$

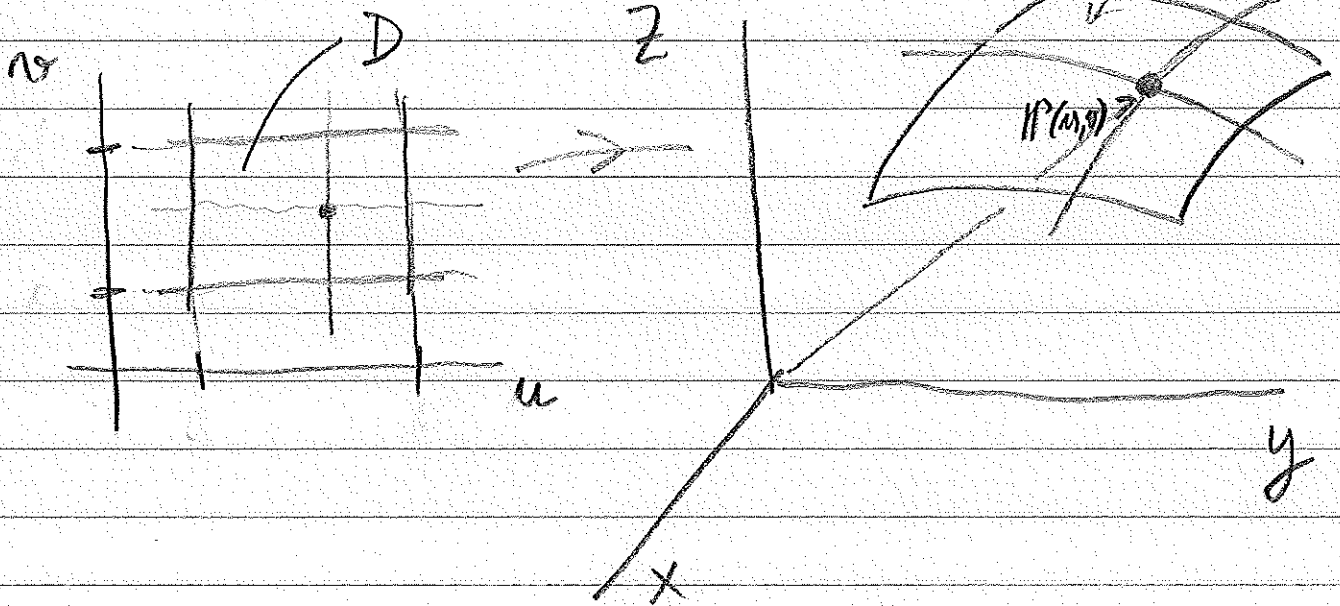
ytintegral 15.5

yt $\mathcal{S}$ på parameterform:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \quad (u, v) \in D$$

eller

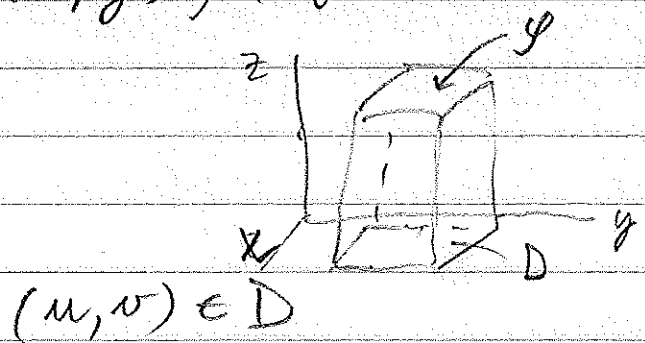
$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$



Exempel Graf $z = f(x, y), (x, y) \in D$

Parametrisering:

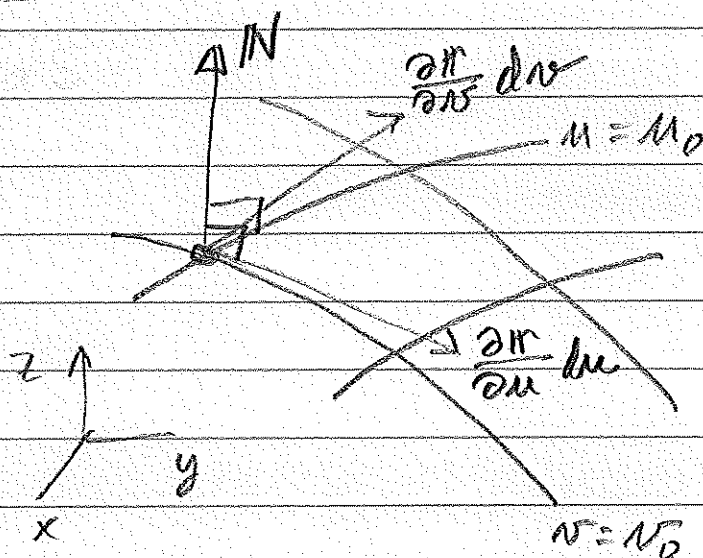
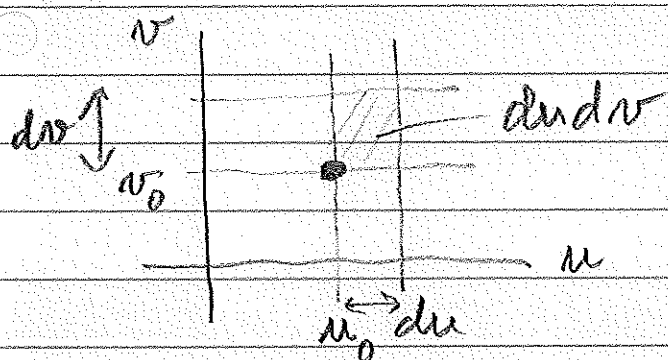
$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$$



Exempel Sfär $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

Parametrisering i sfärska koord
($S = R$)

$$\begin{cases} x = R \sin \phi \cos \theta \\ y = R \sin \phi \sin \theta \\ z = R \cos \phi \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{matrix}$$



Areaelementet:

$$dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv$$

Tangenter: $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$ och $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$.

En normalvektor:

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$$

ytintegralen: $\iint_D f dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv$

Exempel Graf $z = f(x, y)$

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

Tangenter:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{i} + f'_1(u, v) \mathbf{k}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{j} + f'_2(u, v) \mathbf{k}$$

En normalvektor:

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f'_1 \\ 0 & 1 & f'_2 \end{vmatrix} = -f'_1(u, v) \mathbf{i} - f'_2(u, v) \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$dS = \sqrt{1 + f'^2_1(u, v) + f'^2_2(u, v)} du dv$$

eller med x, y :

$$dS = \sqrt{1 + f'^2_x(x, y) + f'^2_y(x, y)} dx dy$$

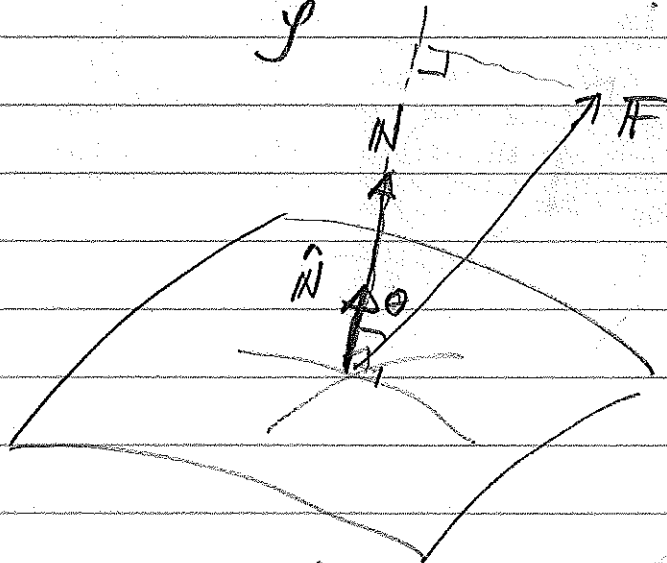
Flödesintegral 15.6

ytan S är orienterbar om det finns normalvektorfält $N(P)$ som varierar kontinuerligt när P rör sig på S .

(Möbius band är en orienterbar.)
Dvs ett entydigt val av upp/med på S .

Då definierar vi flödesintegralen av vektorfältet F genom S :

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_S F \cdot \hat{N} dS$$



Skalära projektionen: $F \cdot \hat{N}$
normalkomponenten av F

exempel Hastighetsfält 10.

$$\iint_S \underbrace{v}_{\left[\frac{m}{s}\right]} \cdot \underbrace{\hat{N}}_{[m^2]} dS = \text{volymflöde} \left[\frac{m^3}{s} \right]$$

$$\iint_S \underbrace{\delta}_{\left[\frac{kg}{m^3}\right]} \underbrace{v}_{\left[\frac{m}{s}\right]} \cdot \underbrace{\hat{N}}_{[m^2]} dS = \text{massflöde} \left[\frac{kg}{s} \right]$$

Här är $\delta v \left[\frac{kg}{m^2 s} \right]$ massflödesstäthet.

I allmänhet: $F \cdot \hat{N}$ flödestäthet

Normalvektorelementet:

val av upp/med
$$\hat{N} = \pm \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

$$dS = \hat{N} dS = \pm \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|} \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv$$

$$= \pm \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv$$

Fyra element:

$$ds = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt$$

$$d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{n}} ds = \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$$

$$dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv$$

$$d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{N}} dS = \pm \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv$$