FÖ 1.1

Flervariabelanalys

* Funktion av flera variabler:

med vektorbeteckning

$$f(\mathbb{r}) = f(x, y, z) \quad (\mathbb{r} = x\mathbb{i} + y\mathbb{j} + z\mathbb{k})$$

eller med matrisbeteckning

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \quad (x = [x_1, \ldots, x_n])$$

* Vektorvärd funktion:

$$\mathbb{r}(t) = x(t)\mathbb{i} + y(t)\mathbb{j} + z(t)\mathbb{k}$$

$$\mathbb{F}(\mathbb{r}) = F_x(\mathbb{r})\mathbb{i} + F_y(\mathbb{r})\mathbb{j} + F_z(\mathbb{r})\mathbb{k}$$

$$f(x) = [f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)]$$

* Både matris- och vektorbeteckningar.
* Derivera: Df, ∇f, $\nabla \cdot \mathbb{F}$, $\nabla \times \mathbb{F}$
* Integrera: $\iiint_D f\,dx\,dy\,dz$
* Optimera: $\max f(x)$
* System av ekv: $f(x) = 0$, Newtons metod.
* Partiella differentialekvationer (PDE):

$$-\nabla \cdot (a \nabla u) = f$$

* Finita elementmetoden (FEM).

Idag: * Vektorfunktion av 1 variabel.
* Parametrisering av kurva.

Adams: 11.1, 11.3

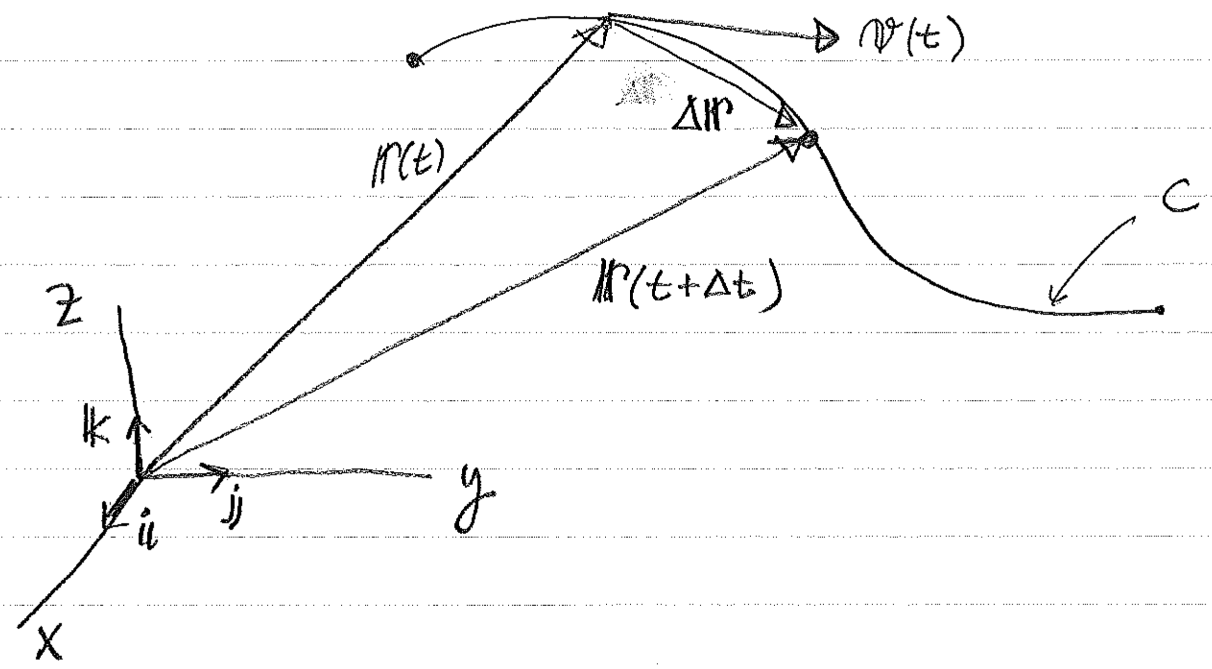
Vektorfunktion

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Geometrisk tolkning: läget av partikel vid tiden t.
Partikeln rör sig längs en kurva C.



Medelhastighet: $\dfrac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \dfrac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$

Hastighet (velocity):

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$$

Fart (speed): $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$

Derivera komponentvis: $\mathbf{v} = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$

Geometrisk tolkning: $\mathbf{v}(t)$ är

tangentvektor till c i punkten $\mathbf{r}(t)$.

Acceleration: $\mathbf{a}(t) = \dfrac{d}{dt}\mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$.

$= \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$

Exempel (cirkel) $(a>0, \omega>0)$

$$\begin{cases} x = a\cos(\omega t) \\ y = a\sin(\omega t) \\ z = 0 \end{cases}$$

Eliminera t:

$x^2 + y^2 = a^2$ (cirkel)

$\mathbf{r} = a\cos(\omega t)\,\mathbf{i} + a\sin(\omega t)\,\mathbf{j}$

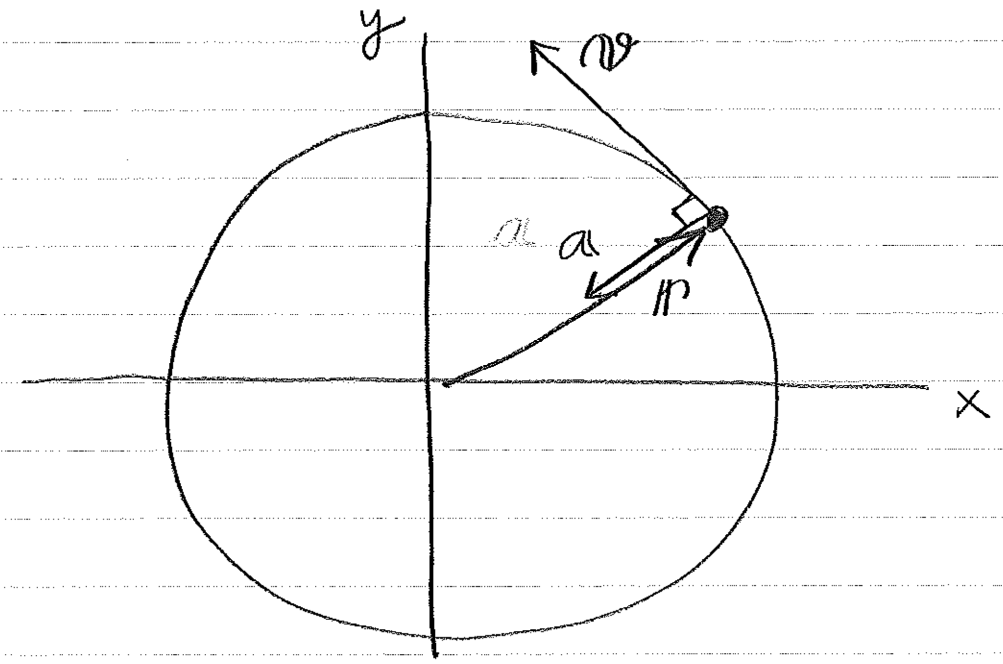
$\mathbf{v} = -a\omega\sin(\omega t) + a\omega\cos(\omega t)\,\mathbf{j}$

$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{(-a\omega\sin(\omega t))^2 + (a\omega\cos(\omega t))^2}$

$= \sqrt{a^2\omega^2} = |a\omega| = a\omega$

$\mathbf{a} = -a\omega^2\cos(\omega t)\,\mathbf{i} - a\omega^2\sin(\omega t)\,\mathbf{j} = -\omega^2\mathbf{r}$

Obs: $\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = 0$ ortogonala $(\mathbf{r}\perp\mathbf{v})$



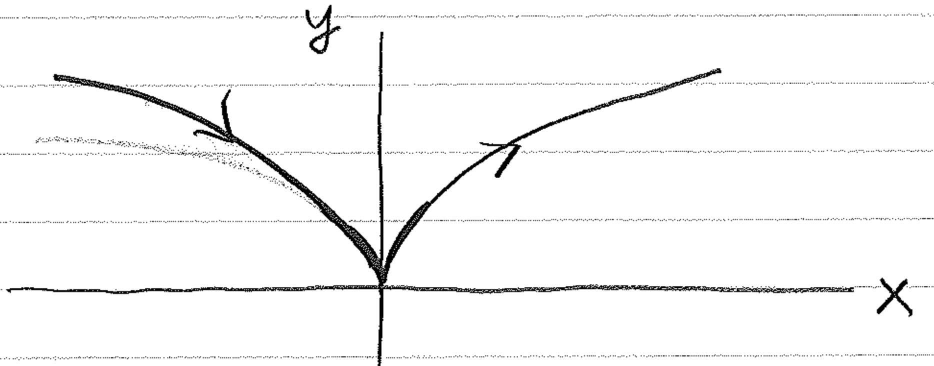
Exempel (spets "cusp")

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \mathbf{r} &= t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} \\ \mathbf{v} &= 3t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} \end{aligned}$$

Eliminera t: $\quad t = x^{1/3}, \quad y = t^2 = (x^{1/3})^2 = x^{2/3}$

Kurvan är en graf, dvs $y = f(x)$:

$$y = x^{2/3} \qquad \left(y' = \frac{2}{3} x^{-1/3} \right)$$



Obs: $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ i origo.

Partikeln saktar in och vänder i origo.

Theorem 1 (deriveringsregler)

Sats 1: derivering av kombinationer

Om $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ och $\lambda(t)$ är deriverbara så är $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, $\lambda\mathbf{u}$, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ och $\mathbf{u}\circ\lambda$ deriverbara och

$$
\begin{array}{ll}
\text{(a)} & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{u}'+\mathbf{v}' \\
\text{(b)} & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\lambda\mathbf{u}) = \lambda'\mathbf{u}+\lambda\mathbf{u}' \\
\text{(c)} & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}' \\
\text{(d)} & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{u}'\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{v}' \\
\text{(e)} & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{u}(\lambda(t))) = \lambda'(t)\mathbf{u}'(\lambda(t)) \\
\text{(f)} & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{u}(t)| = \dfrac{\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{u}'(t)}{|\mathbf{u}(t)|} \quad \text{om } \mathbf{u}(t)\neq 0
\end{array}
$$

Bevis. Skriv på komponentform och använd de vanliga deriveringsreglerna.

Obs från (c):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{u}|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) = \mathbf{u}'\cdot\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}' = 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}'$$

och

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{u}|^2 = 2|\mathbf{u}|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{u}|$$

vilket ger

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{u}| = \frac{1}{2|\mathbf{u}|}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{u}|^2 = \frac{1}{2|\mathbf{u}|}2\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}'}{|\mathbf{u}|}$$

Detta är ett alternativt bevis av (f).
Det är enklare att räkna med $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$ än med $|\mathbf{u}|$!

Parametrisering av kurva (Adams 11.3)

En **kurva** i rummet är en **punktmängd** av formen:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad t \in [a, b]$$

där koordinatfunktionerna är kontinuerliga (så att den hänger ihop).

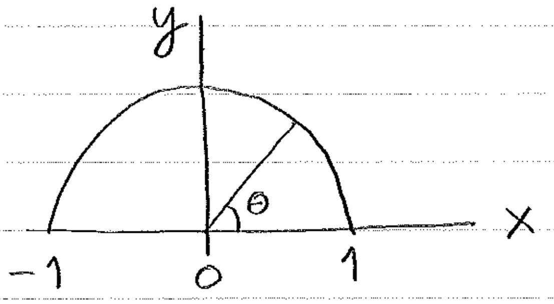
Vi antar även att $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ är kontinuerlig, annars kan kurvan vara patologisk t.ex. fraktal.

Kurvan blir då **slät** (smooth) utom möjligen där $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{0}$ (kom ihåg: spets).

En kurva kan parametriseras på många sätt.

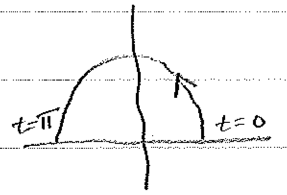
Exempel (halvcirkel)

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y \geq 0$$



a) Välj $t = \theta$.

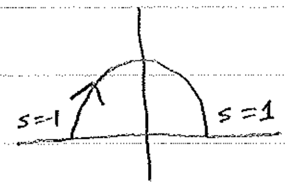
$$\begin{cases} x = \cos(t), \\ y = \sin(t), \end{cases} \qquad t \in [0, \pi]$$



$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\sin(t)\,\mathbf{i} + \cos(t)\,\mathbf{j}, \quad \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = 1$$

b) Välj $s = x$.

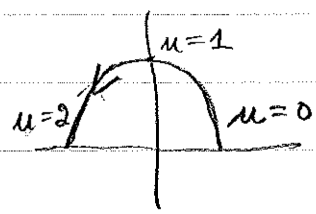
$$\begin{cases} x = s, \\ y = \sqrt{1-s^2}, \end{cases} \qquad s \in [-1, 1]$$



$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{i} + \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}\,\mathbf{j}, \quad \left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right| = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$$

c) Välj $u = 1 - x$.

$$\begin{cases} x = 1-u, \\ y = \sqrt{1-(1-u)^2}, \end{cases} \qquad u \in [0, 2]$$



$$\frac{d\mathbf{r}}{du} = -\mathbf{i} + \frac{1-u}{\sqrt{1-(1-u)^2}}\,\mathbf{j}, \quad \left|\frac{d\mathbf{r}}{du}\right| = \frac{1}{\sqrt{1-(1-u)^2}}$$

d) Kan skrivas som en graf: $y = \underset{(-)}{(+)}\sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1, 1]$

Byte av parameter:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \underbrace{\frac{d\mathbf{r}}{ds}}_{\text{vektor}} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{\text{skalär}} \quad \text{(kedjeregeln)}$$

påverkar farten och

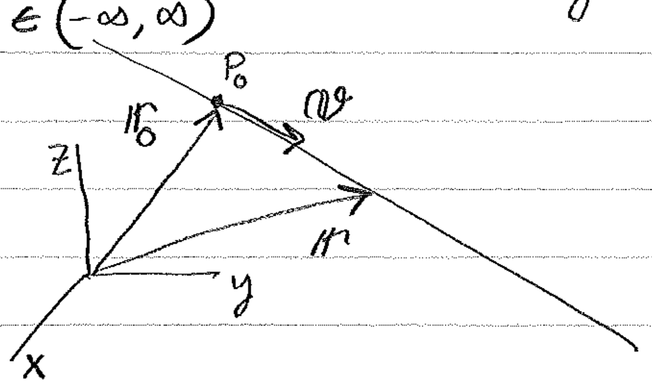
byter riktning om $\frac{ds}{dt} < 0$.

I vårt exempel: $\frac{du}{ds} = \frac{d(1-x)}{dx} = -1$.

Exempel (rät linje)

P_0 punkt på linjen
$\mathbf{v}$ riktningsvektor

$$\begin{cases} x = x_0 + t v_x \\ y = y_0 + t v_y \\ z = z_0 + t v_z \end{cases}, \quad t \in (-\infty, \infty)$$



$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$$