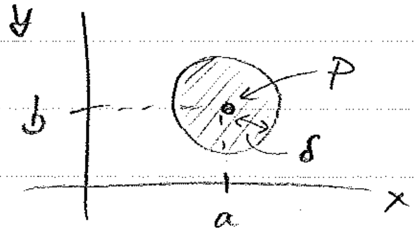
FÖ 1.3

12.2 Gränsvärde och kontinuitet 2016-03-24 (1

(neighborhood)

Repetera 10.1 En omgivning till $P=(a,b)$ är en cirkelskiva (disk) med centrum i (a,b).



Definition 2 Vi säger att

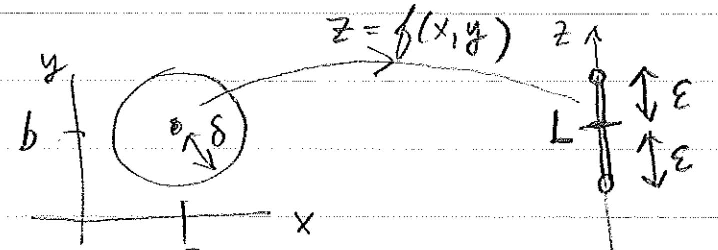
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

om

(i) varje omgivning av (a,b) innehåller punkter från $D(f)$ som är skilda från (a,b),

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ så att

$$\begin{cases} (x,y) \in D(f) \\ 0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta \end{cases} \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$$



Obs: (x,y) närmar sig (a,b) på alla möjliga sätt.

<u>Exempel 1</u> $\quad f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ när $(x,y) \to (0,0)$

Typ " $\dfrac{0}{0}$ ". $\qquad D(f) = \{(x,y) \neq (0,0)\}$

På x-axeln $(y=0)$: $\quad f(x,y) = f(x,0) = 0 \to 0, \ x \to 0$
På y-axeln $(x=0)$: samma
På linjen $y = x$: $\quad f(x,y) = f(x,x) = \dfrac{2x^2}{2x^2} = 1, \ x \to 0$

Gränsvärdet $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ existerar ej.

<u>Exempel 2</u> $\quad \displaystyle\lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ $\quad$ Typ " $\dfrac{0}{0}$ ".

Vi gissar $L = 0$, för " grad 3/grad 2 ". $\qquad D(f) = \{(x,y) \neq (0,0)\}$

<u>Bevis</u>
$$\left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} - 0 \right| = \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1} |y| \leq$$
$$\leq |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} \to 0 \quad \text{då } (x,y) \to (0,0)$$

<u>Definition 3</u> Funktionen f är kontinuerlig i (a,b) om
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

(Dvs om " värdet = gränsvärdet ".)

I exempel 2 existerar inte $f(0,0)$. Men vi kan

12.3 Partiella derivator

<u>Definition 4</u> De partiella derivatorna av $f(x,y)$ med avseende på x och y är

$$f_1(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$f_2(x,y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$$

<u>Exempel</u> $f(x,y) = x^3y^2 + x$

$f_1(x,y) = 3x^2y + 1$

$f_2(x,y) = 2x^3y$

<u>Beteckningar</u> $z = f(x,y)$

$$f_1(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = D_1 f(x,y) = D_x f(x,y)$$

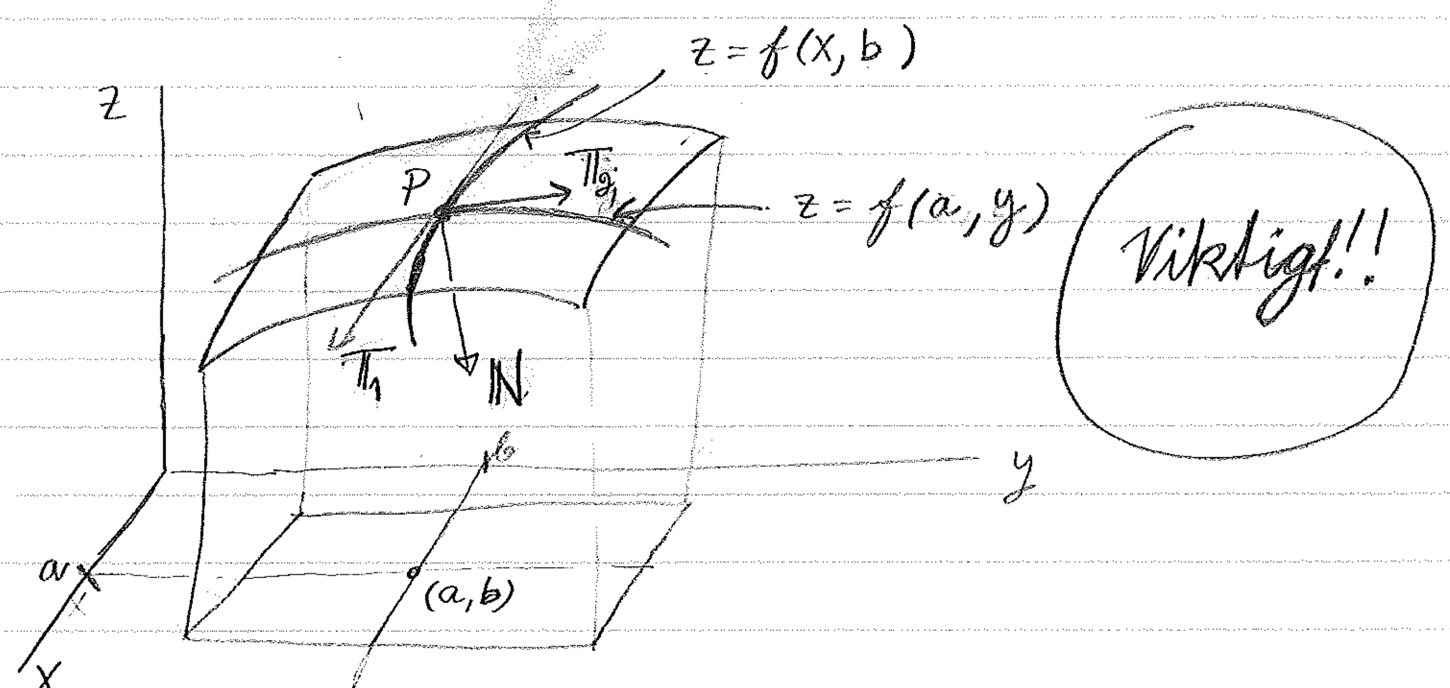
$$f_2(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = D_2 f(x,y) = D_y f(x,y)$$

Detta är Adams beteckning. Borde ha ett "prim", dvs

$$f_1'(x,y), \quad f_2'(x,y), \quad f_x'(x,y), \quad f_y'(x,y)$$

Tangentplan och normal till graf (sid 686)

Graf: $z = f(x,y)$ $\quad\quad P = \big(a, b, f(a,b)\big)$



Två kurvor på ytan: $z = f(x,b)$ och $z = f(a,y)$
På parameterform:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + b\mathbf{j} + f(x,b)\mathbf{k} \quad \text{(parameter: } x\text{)}$$

$$\mathbf{r} = a\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(a,y)\mathbf{k} \quad \text{(parameter: } y\text{)}$$

Tangentvektorer i P:

$$\mathbf{T}_1 = \frac{d\mathbf{r}}{dx} = \mathbf{i} + f_1'(a,b)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}_2 = \frac{d\mathbf{r}}{dy} = \mathbf{j} + f_2'(a,b)\mathbf{k}$$

De spänner upp tangentplanet i P.
En normalvektor ges av

$$\mathbb{N} = \mathbb{T}_2 \times \mathbb{T}_1 = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ 0 & 1 & f_2'(a,b) \\ 1 & 0 & f_1'(a,b) \end{vmatrix} =$$

$$= f_1'(a,b)\,\mathbb{i} + f_2'(a,b)\,\mathbb{j} - \mathbb{k}$$

Tangentplanets ekvation:

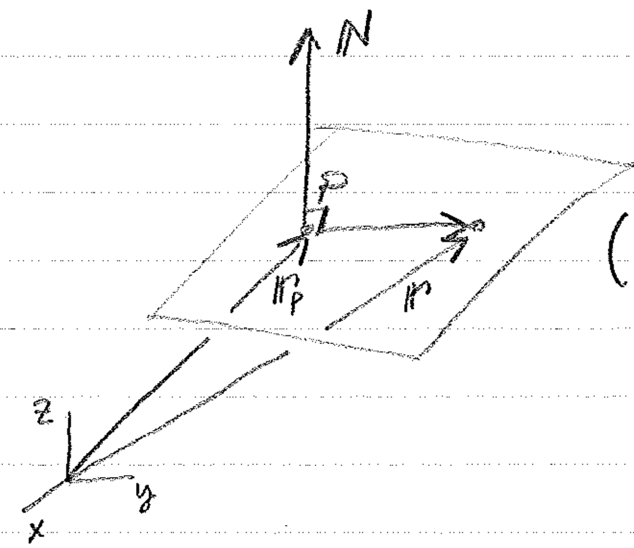
$$\mathbb{N} \cdot (\mathbb{r} - \mathbb{r}_P) = 0$$

$$f_1'(a,b)(x-a) + f_2'(a,b)(y-b) - (z - f(a,b)) = 0$$

$$z = f(a,b) + f_1'(a,b)(x-a) + f_2'(a,b)(y-b)$$

Detta är alltså ekvationen för tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $P = (a, b, f(a,b))$.

Senare ska göra detta på annat sätt med hjälp av gradientvektor.



Planets ekv.:

$$(\mathbb{r} - \mathbb{r}_P) \cdot \mathbb{N} = 0$$

12.4 Derivator av högre ordning.

Rena andra-derivator $\overset{\text{av } z=f(x,y)}{\vee}$ med avseende på x och y :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = f_{11}(x,y) = f_{xx}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} = f_{22}(x,y) = f_{yy}(x,y)$$

Blandade derivator med avseende på x och y :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = f_{21}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

först y sedan x

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = f_{12}(x,y) = f_{xy}(x,y)$$

Detta är beteckningar enligt Adams.
Man borde beteckna derivator med "prim", dvs

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1'(x,y) = f_x'(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{21}''(x,y) = f_{yx}''(x,y)$$

och så vidare. Så att man inte förväxlar med vektor- och matris-index, t.ex.,

$$f = (f_1, \dots, f_m) .$$

Exempel $f(x,y,z) = z^2 e^{x-y}$

$f_1'(x,y,z) = z^2 e^{x-y}$ $\quad f_2'(x,y,z) = -z^2 e^{x-y}$

$f_3'(x,y,z) = 2z\, e^{x-y}$

$f_{31}''(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x} f_3' = 2z\, e^{x-y}$

$f_{13}''(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z} f_1' = 2z\, e^{x-y}$

$f_{133}'''(x,y,z) = 2\, e^{x-y}, \quad f_{313}''' = 2\, e^{x-y}$

Obs att $f_{31}'' = f_{13}''$, $f_{133}''' = f_{313}'''$ här. Det är ingen slump.

Sats 1 (Blandade derivator är lika.)

Antag att två blandade derivator av ordning n består av samma derivator i olika ordning. Om dessa är kontinuerliga i P och alla derivator av lägre ordning är kontinuerliga i en omgivning till P så är de två blandade derivatorna lika i P.

Utan bevis.

En lite enklare (men svagare) formulering:

Om alla partiella derivator till f är kontinuerliga i en omgivning till P så spelar det ingen roll i vilken ordning man beräknar de blandade partiella derivatorna.

Exempel 3 (Laplace ekvation)

Visa att $z = e^{kx}\cos(ky)$ $\quad (k \in \mathbb{R})$

uppfyller den partiella differentialekvationen (PDE)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Bevis: $\frac{\partial z}{\partial x} = k e^{kx}\cos(ky)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = k^2 e^{kx}\cos(ky)$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -k e^{kx}\sin(ky)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -k^2 e^{kx}\cos(ky)$

så att

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = k^2 e^{kx}\cos(ky) - k^2 e^{kx}\cos(ky) = 0$$

Exempel 4 (Vågekvationen)

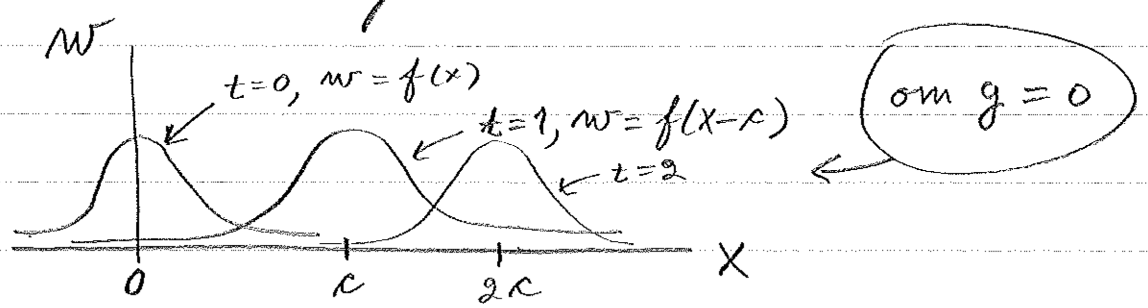
Funktionen

$$w = f(x-ct) + g(x+ct)$$

uppfyller PDE:n

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Här betyder termen $f(x-ct)$ en våg som rör sig åt höger med hastigheten c.



Termen $g(x+ct)$ är en våg som rör sig åt vänster.