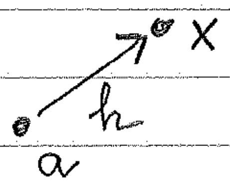
Fö 2.2 Jacobi + Newton

Derivator med matrisbeteckningar.

En funktion av två variabler, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x_1, x_2)$$



Baspunkt: $a = (a_1, a_2)$

Ändring: $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \end{bmatrix}$, $\quad x = a + h$

Steglängd: $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$

Funktionen f är <u>deriverbar</u> i a om det finns tal $m_1(a)$, $m_2(a)$ så att

$$\boxed{\lim_{|h| \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - m_1(a)h_1 - m_2(a)h_2}{|h|} = 0}$$

I så fall: med $h = (h_1, 0)$ resp. $h = (0, h_1)$ ser vi att

$$m_1(a) = f_1'(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$$

$$m_2(a) = f_2'(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)$$

Linjäriseringsformeln:

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f_1'(a)(x_1-a_1) + f_2'(a)(x_2-a_2)}_{=L(x)} + \underbrace{E_f(x,a)}_{=\text{felet}}$$

$$L(x) = f(a) + \begin{bmatrix} f_1'(a) + f_2'(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

Jacobimatrisen (derivatan):

$$f'(a) = Df(a) = \begin{bmatrix} f_1'(a) & f_2'(a) \end{bmatrix} \quad (\text{radmatris})$$

$$L(x) = f(a) + f'(a)h = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Exempel $f(x) = x_1 \sin(x_2), \quad a = (1,0)$

$$f_1'(x) = \sin(x_2), \quad f_1'(1,0) = 0$$

$$f_2'(x) = x_1 \cos(x_2), \quad f_2'(1,0) = 1$$

$$L(x) = 0 + [0, 1] \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 0 \end{bmatrix}$$

Två funktioner av två variabler: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

$$f'_{1,1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}$$

$$f'_{1,2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \quad \text{osv}$$

$$L_1(x) = f_1(a) + f'_{1,1}(a)\,h_1 + f'_{1,2}(a)\,h_2$$

$$L_2(x) = f_2(a) + f'_{2,1}(a)\,h_1 + f'_{2,2}(a)\,h_2$$

Jacobi-matrisen:

$$f'(a) = Df(a) = \begin{bmatrix} f'_{1,1}(a) & f'_{1,2}(a) \\ f'_{2,1}(a) & f'_{2,2}(a) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) \end{bmatrix}$$

$$L(x) = \begin{bmatrix} L_1(x) \\ L_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(a) \\ f_2(a) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f'_{1,1}(a) & f'_{1,2}(a) \\ f'_{2,1}(a) & f'_{2,2}(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

$$= f(a) + f'(a)\,h$$

Allmänt: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{bmatrix}$$

$$f'(a) = Df(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}$$

$m \times n$

Kedjeregeln:

1. $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$
2. $b = g(a)$
3. $f'(b)$ och $g'(a)$ existerar

Då är $u = f \circ g$, dvs $u(x) = f(g(x))$ deriverbar i a och

$$\underbrace{u'(a)}_{p \times n} = \underbrace{f'(b)}_{p \times m} \underbrace{g'(a)}_{m \times n}$$

(Introduktion till Datorövning 2.)

Numerisk beräkning av Jacobimatrisen

$f : R^n \longrightarrow R^m$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix}$$

$$f'(a) = Df(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} \quad m \times n$$

Derivatan $f'(a)$ kan beräknas kolonnvis.

kolonn nr j

$$\text{Kolonn nr } j: \ \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a) \end{bmatrix}$$

approximeras av

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2|h|} = \frac{f(a+\delta e_j) - f(a-\delta e_j)}{2\delta}$$

där riktningsvektor är

$$h = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \delta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \text{nr } j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \delta e_j \quad , \quad e_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \text{rad nr } j \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

e_j är j:te basvektorn, $|h| = \delta = 10^{-5}$ steglängd

Jag visar detta på datorn. Se slutet av föreläsningsanteckningarna.

Newtons metod

System av ekv

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

n ekv, n obekanta

Matrisform: $f(x) = 0$ $\quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Antag approx lösning a.
Vi söker bättre approx. $x = a + h$
Linjärisera i a: $L(x) = f(a) + f'(a)h$

Lös linjäriserade ekv.:

$$L(x) = 0$$
$$f(a) + f'(a)h = 0$$
$$f'(a)h = -f(a)$$

Uppdatera: $x = a + h$

Algoritm:

while $|h| > tol$

residual $b = -f(x)$

Jacobimatris: $A = f'(x)$

lös linj. ekv. $Ah = b$

uppdatera $x = x + h$

end

Exempel Newtons metod

Beräkna ett steg av Newtons metod för ekv. systemet:

$$\begin{cases} x_1 + x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 - x_1^2 = 1 \end{cases}$$

Vi bildar funktionen

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 - 1 \\ -x_1 + x_2 - x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 - 1 \\ x_2 + x_3 - x_1^2 - 1 \end{bmatrix}$$

så att ekv. blir $f(x) = 0$.

Välj en startpunkt, t. ex., $(0,0,0)$.

1) Residualen: $b = -f(0,0,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2) Jacobimatrisen:

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 1 + x_2^2 + x_3^2 & 2x_1 x_2 & 2x_1 x_3 \\ -1 + x_2 x_3 & 1 - x_3 + x_1 x_3 & -x_2 + x_1 x_2 \\ -2x_1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = f'(0,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3) Linjäriserade ekv. $Ah = b$

obs: triangulär matris

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} h_1 = 1 \\ -h_1 + h_2 = 1 \\ h_2 + h_3 = 1 \end{cases}$$

Lösningen är $h = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

4) Uppdatera: $x = x_0 + h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

Jag gör sedan en lösning i Matlab med programmet newton.m.

Numerisk beräkning av Jacobimatris

```
>> A=[1 2 3 4;5 6 7 8]

A =

     1     2     3     4
     5     6     7     8

>> a=[1 1 1 1]'

a =

     1
     1
     1
     1


>> f=@(x)A*x     % en linjär funktion

f =

    @(x)A*x

>> f(a)

ans =

    10
    26

>> delta=1e-5   % steglängden

delta =

     1.000000000000000e-05
```

```
>> e=zeros(size(a))   % nollvektor

e =

     0
     0
     0
     0

>> e(1)=1    % första basvektorn

e =

     1
     0
     0
     0

>> h=delta*e   % riktningsvektorn

h =

   1.0e-05 *

   1.00000000000000
                  0
                  0
                  0

>> (f(a+h)-f(a-h))/(2*delta)    %
differenskvot

ans =

   0.99999999962142
   5.00000000165983
```

```
>> Df=(f(a+h)-f(a-h))/(2*delta)

Df =

   0.999999999962142
   5.000000000165983

>> Df(:,1)=(f(a+h)-f(a-h))/(2*delta) % första
kolonnen i jacobianen

Df =

   0.999999999962142
   5.000000000165983

>> e=zeros(size(a)); e(2)=1; h=delta*e   % ny
riktningsvektor

h =

   1.0e-05 *

                   0
   1.000000000000000
                   0
                   0

>> Df(:,2)=(f(a+h)-f(a-h))/(2*delta)  % andra
kolonnen i jacobianen

Df =

   0.999999999962142   1.999999999924284
   5.000000000165983   5.999999999950488

>> Df=jacobi(f,a)  % jacobianen beräknad med
jacobi.m
```

```
Df =

   0.999999999962142   1.999999999924284
2.999999999975244   4.000000000026205
   5.000000000165983   5.999999999950488
7.000000000090266   8.000000000052410

>>
```