

Optimering. Mycket ingenjörsarbete går ut på att optimera, dvs minimera eller maximera en funktion.

T.ex. maximera utbytet av en process,
minimera materialåtgången, osv.

Dvs $\max f(x)$ eller $\min f(x)$.

Obs att $\max f(x) = \min(-f(x))$.

Det handlar om att sortera värdena,
oerhört kostsam beräkning. ofta

kan man ta en genväg med
hjälp av flervariabelanalys:

i maxpunkt gäller

$f'(x) = 0$ (radmatriis)
Ekvationssystem, Newtons metod.
Matematisk disciplin: optimeringslära.

13.1 Extremvärden

Funktion av m variabler $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

(Adams två variabler $z = f(x, y)$)

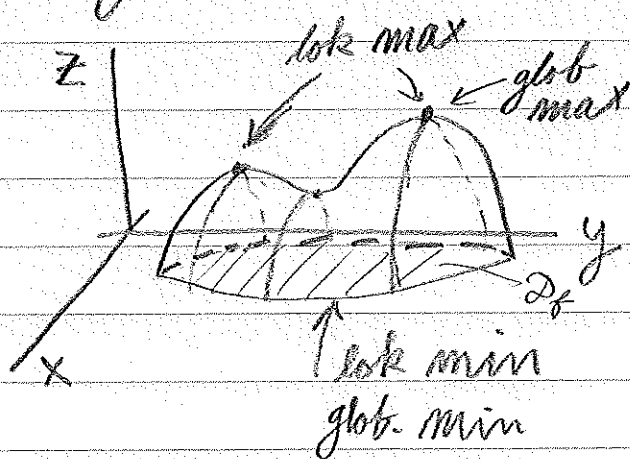
Funktionen f har lokalt maximum i a om

$f(x) \leq f(a)$ för alla $x \in D_f$ som är tillräckligt nära a .

Globalt maximum i a om

$f(x) \leq f(a)$ för alla $x \in D_f$.

Lokalt och globalt minimum på samma vis.



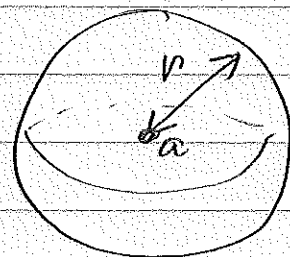
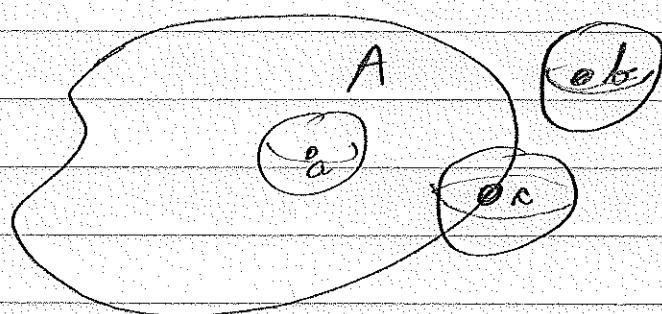
Extremvärde = maximum eller minimum, dvs värdet $f(a)$.

Extrempunkt = punkten a där max eller min inträffar.

Beteckningar

Omgivning till a : $B(a, r) = \{x : |x - a| < r\}$

(öppet klot ("ball") med centrum i a och radie r)



a är inre punkt till A : finns omgivning helt i A

b är yttre punkt till A : finns omg. helt utanför A

c är randpunkt till A : varje omgivning skär både A och utanför A

A är en sluten (closed) mängd om den innehåller alla sina randpunkter.

A är öppen om innehåller inga av sina randpunkter.

Exempel öppet klot $\{x : |x - a| < r\}$

slutet klot $\{x : |x - a| \leq r\}$

$\mathbb{R}^m$ både öppen och sluten (inga randpunkter)
 A är en begränsad mängd (bounded) om $A \subset B(0, R)$ för något R .

Sats 1 (Nödvändiga villkor för extremvärde.)

Om f har extremvärde i a så är a en av följande:

(a) kritisk punkt till f , dvs $f'(a) = 0$.

(b) singulär punkt till f , dvs $f'(a)$ existerar ej.

(c) randpunkt till D_f .

Bevis Antag att a är en punkt som inte är av typen (a), (b) eller (c). Alltså är a en inre punkt med $f'(a) \neq 0$.

Vi måste visa att a inte är extrempunkt.

Antag att den är extrempunkt.

Bilda envariabel-funktionen

$$g(t) = f(a + th).$$

Då har g extrempunkt i $t=0$ för alla riktnings h .

Men $g'(0) = f'(a)h$ måste då vara 0 för alla h . Det är omöjligt eftersom $f'(a) \neq 0$.

Satsen handlar om bland vilka slags punkter vi ska söka extrempunkter. Men den garanterar inte att det finns några extrempunkter.

Men det gör denna sats.

Sats 2 (Tillräckliga villkor för extremvärde).

Om f är kontinuerlig och $D_f \subset \mathbb{R}^m$ är sluten och begränsad (dvs kompakt) så finns punkter i D_f där f har globala max. och min.

(utan bevis.)

Vi säger: f är begränsad (bounded) om det finns $M: |f(x)| \leq M$ för alla $x \in D_f$.

Exempel $f(x, y) = x^2 + y^2$

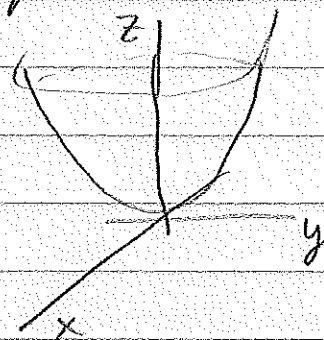
(6)

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2, \quad D_f = \mathbb{R}^2$$

Inga randpunkter, inga singulära punkter.

Kritpunkt: $f'(x) = [2x_1, 2x_2] = [0, 0]$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$



Kritisk punkt i origo.

Vi ser att: globalt min i $(0, 0)$

inget globalt max. för

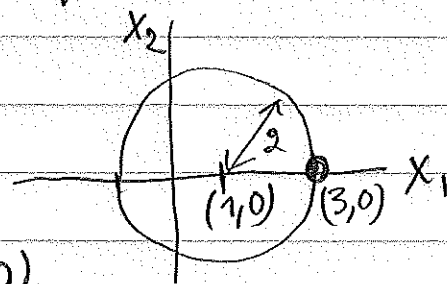
$f(x) \rightarrow \infty$ då $|x| \rightarrow \infty$. (f är obegränsad)

Exempel $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ med $D_f = \{x : |x - (1, 0)| \leq 2\}$

(stutet klot)

Vi inser: globalt max

i $(3, 0)$, globalt min i $(0, 0)$.



Exempel Samma f med $D_f = \{x : |x - (1, 0)| < 2\}$

(öppet klot). Globalt min i $(0, 0)$, men
inget globalt max för $(3, 0) \notin D_f$.

Eksempel $f(x, y) = y^2 - x^2$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$.

$$f(x) = x_2^2 - x_1^2$$

$$f'(x) = [-2x_1, 2x_2] = [0, 0]$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

Kritisk punkt i $(0, 0)$.

Varken max eller min:

$$f(x, 0) = -x^2 < f(0, 0) = 0 \text{ om } x \neq 0$$

$$f(0, y) = +y^2 > f(0, 0) = 0 \text{ om } y \neq 0$$

Sadelpunkt.

Vi säger att en inre kritisk punkt är en saddelpunkt om den är varken max- eller min punkt.

Hur avgör man om en kritisk punkt är max, min eller saddelpunkt?

Nästa sats ger delvis svar.