

Andra-derivata-testet.

Hur kan man avgöra om en kritisk punkt är max-, min- eller sadelpunkt?

Vi ska "kolla tecknet" på andra derivatan.

Vi behöver Hesse-matrisen:

$$H(x) = f''(x) = D^2 f(x) =$$

$$= \begin{bmatrix} f''_{11}(x) & \dots & f''_{1m}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f''_{m1}(x) & \dots & f''_{mm}(x) \end{bmatrix}$$

Den är $m \times m$, symmetrisk $f''_{ij} = f''_{ji}$ enligt Sats 1 i 12.4.

Sats 3 (Andra-derivata-testet)

12

Antag f har en kritisk punkt
i en inre punkt $a \in D_f$. Antag att
alla partiella derivator av ordning
två är kontinuerliga i en omgivning
till a så att Hesse-matrisen
 $f''(x)$ också är kontinuerlig.

Då gäller följande:

(a) $f''(a)$ positivt definit
 $\Rightarrow$ lokalt min i a .

(b) $f''(a)$ negativt definit
 $\Rightarrow$ lokalt max i a .

(c) $f''(a)$ indefinit
 $\Rightarrow$ sadelpunkt i a .

(d) $f''(a)$ är ej pos. eller neg. definit eller
indefinit $\Rightarrow$ ingen information

(Således: om $f''(a)$ är positivt eller negativt definit, så är a lokalt min eller max.)

Kom ihåg från linjär algebra. ⁽³⁾

Matris A , $m \times m$, symmetrisk,
dvs $A^T = A$, $a_{ij} = a_{ji}$.

Funktionen

$$g(x) = x^T A x = [x_1, \dots, x_m] \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$
$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i x_j =$$
$$= a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + \dots + a_{mm} x_m^2$$

kallas kvadratisk form.

A har reella egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ och
ortonormerade egenvektorer $g_1, \dots, g_m$.

(a) A är pos. definit $\Leftrightarrow x^T A x > 0 \quad \forall x \neq 0$

$$\Leftrightarrow \text{alla } \lambda_j > 0$$

(b) A neg. def. $\Leftrightarrow x^T A x < 0 \quad \forall x \neq 0$

$$\Leftrightarrow \text{alla } \lambda_j < 0$$

(c) A är indefinit $\Leftrightarrow x^T A x$ både > 0 och < 0

$$\Leftrightarrow \text{något } \lambda_j > 0 \text{ och något } \lambda_j < 0.$$

(d) A är pos. eller neg. semidefinit

$$\Leftrightarrow x^T A x \geq 0 \text{ eller } x^T A x \leq 0$$

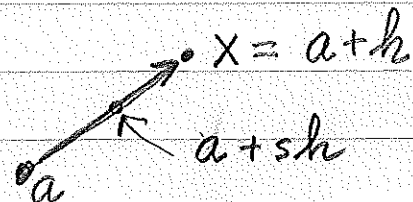
$$\Leftrightarrow \text{alla } \lambda_j \geq 0 \text{ eller } \text{alla } \lambda_j \leq 0$$

Bevis av Satz 3

(4)

Taylor's formel av grad 1:

$$(x = a + h)$$



$$f(x) = f(a + h) =$$

$$= f(a) + f'(a)h + \underbrace{\frac{1}{2} h^T f''(a + sh) h}_{\text{restterm } R_1}$$

där $0 \leq s \leq 1$.

restterm R_1

Den är på formen

$$[\cdot] = [\cdot] + [\dots] \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} + \frac{1}{2} [\dots] \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Här är $f'(a) = 0$ (kritisk punkt),

så att

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2} h^T f''(a + sh) h.$$

Om $f''(a)$ är pos. def. så är även

$f''(a + sh)$ det för alla h med $|h|$ litet.

(Här behövs strikt tecken: $h^T f''(a) h > 0$.)

I så fall

$$f(x) = f(a) + \underbrace{\frac{1}{2} h^T f''(a+sh) h}_{>0} > f(a)$$

för alla h med litet $|h| > 0$.

Alltså: lokalt min i a .

Det bevisar (a). De andra fallen bevisas på samma vis.

Obs att det behövs strikt tecken!
Därför ger fall (d) ingen info.

Undersökning av kritiska punkter. (6)

Metod.

1) Plotta funktionen om det går för att få grov uppfattning.

2) Kritiska punkter ges av

$$f'(x)^T = 0 \quad (\text{kolonnmatrix})$$

Löses för hand eller hellre med Newtons metod.

3) För varje kritisk punkt ställer i upp Hessematrisen

$f''(a)$
egenvärdena beräknas.

Alla $\lambda_j \geq 0 \Rightarrow$ lok. min
 $\lambda_j < 0 \Rightarrow$ lok max

olika tecken $\Rightarrow$ sadelpunkt.

Obs att Hessematrisen är Jacobimatrisen för $f'(x)^T$.

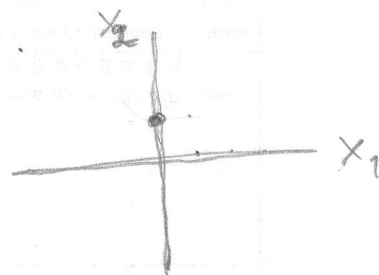
Exempel $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3$

1) Kritiska punkter ges av:

$$f'(x)^T = \begin{bmatrix} 2x_1 x_2^3 \\ 3x_1^2 x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lösning: $x_1 = 0$ eller $x_2 = 0$.

det kritiska punkter
på hela x_1 -axeln och
hela x_2 -axeln.



2) Hesse-matrisen:

$$f''(x) = \begin{bmatrix} 2x_2^3 & 6x_1 x_2^2 \\ 6x_1 x_2^2 & 12x_1^2 x_2 \end{bmatrix}$$

Några kritiska punkter:

a) $a = (0, 1)$, $f''(0, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$

Fall (d), ingen info. $f(0, 1) = 0$.

Vad är det då? Nära $a = (0, 1)$: $f(s, 1+t) = s^2(1+t)^3 \geq 0 = f(0, 1)$
för alla små s, t .

Lokalt minimum.

b) $a = (0, 0)$ $f''(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Ingen info. $f(0, 0) = 0$

$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1, x_1) = x_1^5 \begin{cases} > 0 & x_1 > 0 \\ < 0 & x_1 < 0 \end{cases}$ Sadelpunkt.

Exempel 6

$$f(x, y, z) = x^2 y + y^2 z + z^2 - 2x$$

(3)

Kritiska punkter:

$$\begin{cases} 2xy - 2 = 0 & (1) \\ x^2 + 2yz = 0 & (2) \\ y^2 + 2z = 0 & (3) \end{cases}$$

(3) ger $z = -\frac{y^2}{2}$

Insätter i (2): $x^2 + 2y \frac{(-y^2)}{2} = 0$

$$x^2 = y^3, \quad y = x^{2/3}$$

Insätter i (1): $x \cdot x^{2/3} = 1, \quad x = 1$

Sedan $y = 1, \quad z = -\frac{1}{2}$

En kritisk punkt: $(1, 1, -\frac{1}{2})$.

Hesse-matrisen:

$$f''(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2y & 2 & 0 \\ 2x & 2z & 2y \\ 0 & 2y & 2 \end{bmatrix}$$

$$f''(1, 1, -\frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Eigenvärden: ges av

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \underbrace{\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}}_{(-1-\lambda)(2-\lambda)-4} - 2 \cdot 2(2-\lambda) = 0$$

$$= (2-\lambda) \left((-1-\lambda)(2-\lambda) - 4 - 4 \right) = 0$$

$$2-\lambda = 0 \text{ eller } \lambda^2 - \lambda - 10 = 0, \quad \lambda = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 10}$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 10} > 0$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + 10} < 0$$

Ortsofen: *sattelpunkt.*

13.2 Extremvärden i begränsade områden

(5)

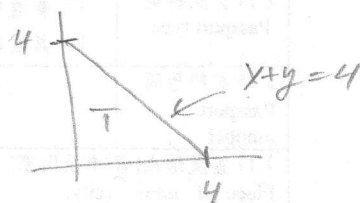
Metod

1) Bestäm alla kritiska och singulära punkter i det inre av D_f .

2) Bestäm extrempunkter på randen av D_f .

3) Jämför f mellan dessa punkter.

Exempel 2 Bestäm extremvärdena för $f(x, y) = x^2 y e^{-(x+y)}$ i triangeln T .



1) Singulära punkter: inga.

Kritiska punkter ges av:

$$\begin{cases} 2xy e^{-(x+y)} + x^2 y e^{-(x+y)} \cdot (-1) = 0 \\ x^2 e^{-(x+y)} + x^2 y e^{-(x+y)} \cdot (-1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy(2-x) = 0 & (1) \\ x^2(1-y) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x=0 \text{ eller } y=0 \text{ eller } x=2$$

$$(2) \Leftrightarrow x=0 \text{ eller } y=1$$

Kritiska punkter: $(0, y)$ och $(2, 1)$.

Endast $(2, 1)$ är inre punkt till T.

$$f(2, 1) = 4e^{-3}$$

$$2) \text{ På randen } x=0: f(0, y) = 0$$

$$\text{På randen } y=0: f(x, 0) = 0$$

$$\text{På randen } \begin{cases} x+y=4 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}: f(x, 4-x) = x^2(4-x)e^{-(x+4-x)} = x^2(4-x)e^{-4}$$

$$g(x) = x^2(4-x)e^{-4} = (4x^2 - x^3)e^{-4}$$

$$g'(x) = (8x - 3x^2)e^{-4} = x(8-3x)e^{-4} = 0$$

$$x=0 \text{ eller } x = \frac{8}{3}, \quad 4 - \frac{8}{3} = \frac{12-8}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Obs: } g(0) = 0, g(4) = 0 \text{ (ändpunkterna)}$$

$$f\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{64 \cdot 4}{27} e^{-4} = \frac{256}{27} e^{-4}$$

$$3) \text{ Jämför: } f(0, y) = 0 = f(x, 0) = 0$$

$$f(2, 1) = 4e^{-3} \approx 0.199$$

$$f\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{256}{27} e^{-4} \approx 0.174 < f(2, 1)$$

$$\text{Max} = f(2, 1)$$

$$\text{Min} = 0 \text{ antas på randen } x=0 \text{ och rand } y=0.$$

Example 6 in lecture 3.2

$$f(x,y,z) = x^2 y + y^2 z + z^2 - 2x$$

```
f = @(x) ( x(1)^2*x(2) + x(2)^2*x(3) + x(3)^2 - 2*x(1) );  
  
Df = @(x) ( jacob_i(f,x)' )    % gradienten  
  
x0 = [1;1;1]                  % startgissning f?r newton  
  
Df(x0)                        % test av gradienten
```

```
Df =  
  
    @(x)(jacob_i(f,x)')
```

```
x0 =  
  
    1  
    1  
    1
```

```
ans =  
  
    0.0000  
    3.0000  
    3.0000
```

```
x = newton(Df,x0,1e-6)    % kritisk punkt
```

```
x =  
  
    1.0000  
    1.0000  
   -0.5000
```

```
D2f = @(x) ( jacob_i(Df,x) ) ;    % Hessematrisen  
  
H = D2f(x)  
  
lambda = eig(H)  
  
y = f(x)                        % vardet av f i x
```

```
H =
```

2.0000	2.0000	0
2.0000	-1.0000	2.0000
0	2.0000	2.0000

lambda =

-2.7016
2.0000
3.7016

y =

-1.2500

.....