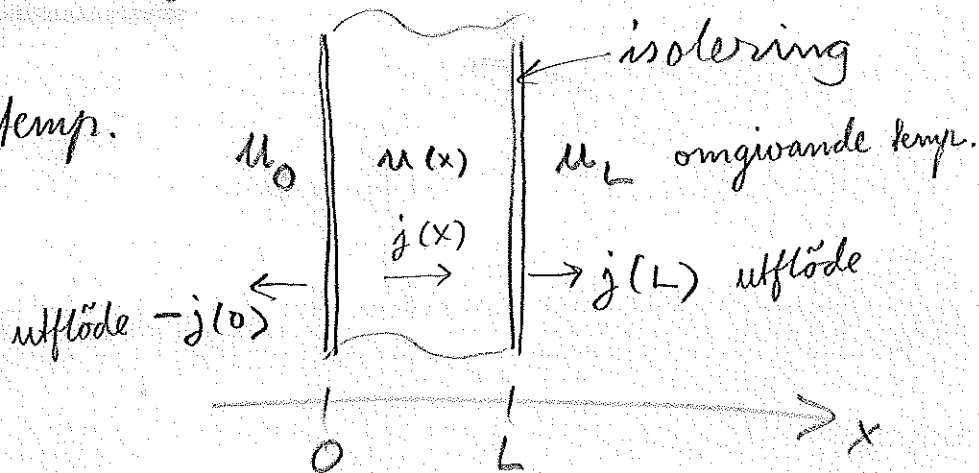


Randvärdesproblem i 1-D

1. Värmelednings ekvationen

$u = u(x) [K]$ temp.
vid $x [m]$.



$$D(-a(x)Du(x)) = f(x), \quad x \in I = (0, L)$$

Här är

- $D = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{m} \right]$
- $f(x) \left[\frac{J}{m^3 s} \right]$ värmekälltäthet
- $u(x) [K]$ temperatur
- $a(x) \left[\frac{J}{m K s} \right]$ värmeledningskoefficient
- $j(x) = -a(x)Du(x) \left[\frac{J}{m^2 s} \right]$ värmeflödestäthet
i x -riktningen (Fouriers lag)

2. Randvillkor

Vid $x = L$:

$$j(L) = k_L (u(L) - u_L) \quad (\text{utåt!})$$

med

u_L [K] omgivande temp.

$u(L)$ [K] temp. på insidan

k_L [$\frac{J}{m^2 K s}$] koefficient

Fouriers lag: $j(L) = -a(L) D u(L)$

Alltså:

$$-a(L) D u(L) = k_L (u(L) - u_L)$$

dvs

$$a D u + k_L (u - u_L) = 0 \text{ för } x=L.$$

Vid $x=0$:

$$-j(0) = k_0 (u(0) - u_0) \text{ (utåt!)}$$

$$j(0) = -a(0) D u(0)$$

$$\text{Alltså: } -a(0) D u(0) = k_0 (u(0) - u_0)$$

Alltså:

$$\boxed{a D_N u + k (u - u_A) = 0 \text{ för } x=0, L.}$$

$$D_N = \begin{cases} -\frac{d}{dx} & \text{vid } x=0 \\ \frac{d}{dx} & \text{vid } x=L \end{cases}$$

$$u_A = \begin{cases} u_0 \\ u_L \end{cases}, \quad k = \begin{cases} k_0 \\ k_L \end{cases}$$

Specialfall 1 $k = \infty$ ingen isolering

$$\frac{1}{k} a D_N u + u - u_A = 0$$

$k \rightarrow \infty$:

$$u - u_A = 0$$

$$u = u_A \quad \text{i } x=0 \text{ eller } x=L$$

Specialfall 2 : $k=0$ perfekt isolering

$$a D_N u = 0$$

$$D_N u = 0 \quad \text{i } x=0 \text{ eller } x=L$$

3. Randvärdesproblem

$$\begin{array}{c} m_0 \\ g_0 \rightarrow \\ -j(0) \leftarrow \end{array} \left[\begin{array}{c} u(x) \\ j(x) \end{array} \right] \begin{array}{c} m_L \\ \leftarrow g_L \\ \rightarrow j(L) \end{array}$$

Finn $u = u(x)$ sådan att

$$\begin{cases} -D(a D u) = f & \text{för } x \in I \\ a D_N u + k(u - u_A) = g & \text{för } x=0, L. \end{cases}$$

Kan i princip lösas genom att integrera två gånger och bestämma de två konstanterna med de två randvillkoren. (oftast omöjliga räkningar. FEM!)

Enkelt exempel

(4)

$$\begin{cases} -D(5Dm) = 0 & i \ I = (0, 1) \\ -5Dm(0) + 3(u(0) - 2) = 0 & (\text{isolerings}) \\ u(1) = 0 & (\text{ingen isolering}) \end{cases}$$

Integrera: $-5Dm(x) = C_1$

Känna igen: $\begin{pmatrix} k_0=3, u_0=2, a=5, g_0=0 \\ k_1=\infty, u_1=0, b=0, g_1=0 \end{pmatrix}$

$$Dm(x) = -\frac{1}{5} C_1$$
$$u(x) = -\frac{1}{5} C_1 x + C_2$$

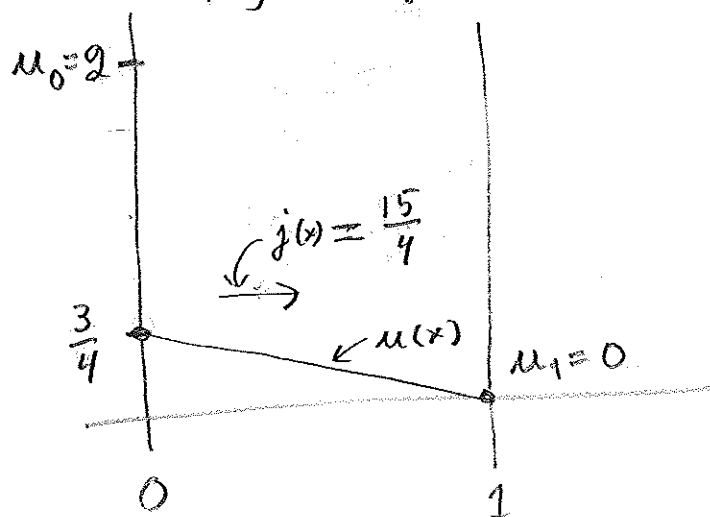
Randvillkor:

$$\begin{cases} 0 = -5Dm(0) + 3(u(0) - 2) = C_1 + 3C_2 - 6 \\ 0 = u(1) = -\frac{1}{5} C_1 + C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + 3C_2 = 6 \\ -C_1 + 5C_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (+) \\ \downarrow \end{matrix} \quad \begin{cases} C_1 + 3C_2 = 6 \\ 8C_2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 6 - 3C_2 = 6 - \frac{9}{4} = \frac{15}{4} \\ C_2 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$u(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}, \quad j(x) = -5Dm(x) = C_1 = \frac{15}{4}$$



Swag formulering

(5)

FEM bygger på swag formulering.

Differentialekvationen:

$$-D(aDu) = f$$

Multiplisera med $v = v(x)$
och integrera:

$$\int_0^L f v \, dx = - \int_0^L D(aDu) v \, dx =$$

$$= \{ \text{part. int.} \} = - \left[a Du v \right]_0^L + \int_0^L a Du Dv \, dx$$

$$= \{ \text{sarvillkor} \} = \underbrace{-a(L) Du(L) v(L)}_{= k_L(u(L) - u_L) - g_L} +$$

$$+ \underbrace{a(0) Du(0) v(0)}_{= k_0(u(0) - u_0) - g_0} + \int_0^L a Du Dv \, dx$$

$$= (k_L(u(L) - u_L) - g_L) v(L)$$

$$+ (k_0(u(0) - u_0) - g_0) v(0) + \int_0^L a Du Dv \, dx$$

Samla u -termer i VL och f, g, u_A i HL:

$$\int_0^L a Du Dv \, dx + k_0 u(0) v(0) + k_L u(L) v(L) =$$

$$= \int_0^L f v \, dx + (k_0 u_0 + g_0) v(0) + (k_L u_L + g_L) v(L)$$

Swag form

Finns $u = u(x)$ sådan att

$$\begin{aligned} \int_0^L a D u D v dx + k_0 u(0) v(0) + k_L u(L) v(L) &= \\ &= \int_0^L f v dx + (k_0 u_0 + g_0) v(0) + (k_L u_L + g_L) v(L) \end{aligned}$$

för alla testfunktioner v .

Randvillkoret $u = u_A$ ($k = \infty$) är

speciellt: man måste välja $v = 0$ i den ändpunkt där $u = u_A$.

Då försvinner motsvarande term
 $v(0) = 0$ eller $v(L) = 0$ i svaga ekv.

Exempel

$$\begin{cases} -D(5Du) = x & \text{i } (0,1) \\ -5Du(0) + 3(u(0) - 2) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

Swag form: Finns $u = u(x)$ sådan
att $u(1) = 0$ och

$$\int_0^1 5 u'(x) v'(x) dx + 3u(0) v(0) = \int_0^1 x v(x) dx + 6v(0)$$

för alla v med $v(1) = 0$.