

(1)

FÖ 5.3 15.1 sid 859-862, 15.2 sid 866-868, 15.3

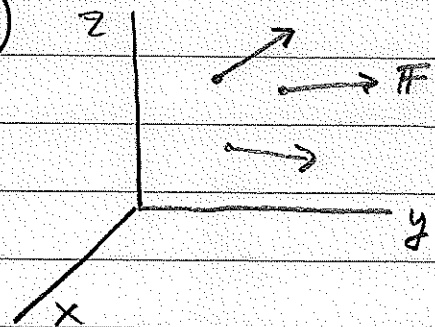
Vektorfält 15.1

Vektorfält i rummet:

$$\mathbb{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}$$

(I varje punkt sitter en pil.)

Även: $\mathbb{F} = (F_1, F_2, F_3)$



Skalärt fält: $f(x, y, z)$ (I varje punkt ett tal.)

Exempel

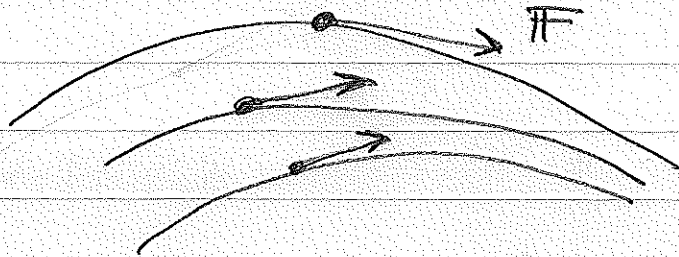
- temperaturfält: $T(x, y, z)$ [K] (skalärt)
- hastighetsfält i strömning: $\mathbf{v}(x, y, z)$ [$\frac{m}{s}$]
- temperaturgradient: $\nabla T = (\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z})$ [$\frac{K}{m}$]
- kraftfält: $\mathbb{F}(x, y, z)$ [N]

$$\mathbb{F}(x, y, z) = -mg\mathbf{k} \quad \text{tyngdkraftsfältet}$$

(2)

Fältlinjer (strömlinjer, kraftlinjer, ...)

är kurvor sådana att $F(x, y, z)$
är tangent till den kurvan som
går genom (x, y, z) .



Sådan kurva $r = r(t)$ ges av

$$\frac{dr}{dt} = \lambda(t) F(r(t))$$

(Genom att välja $\lambda(t)$ kan vi
ändra farten av partikeln som
rör sig längs kurvan.)

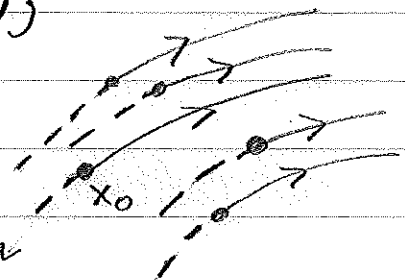
Detta är ett system av ODE.

Löses med Matlab:

```
>> F = @(t,x) (lambda(t)*[F1(x); F2(x); F3(x)]);
```

```
>> [t,x] = ode23(F, [0,T], x0);
```

```
>> plot3(t,x)
```



Löser begynnelsevärdesproblem
(framåt).

(3)

En annan metod är att eliminera t :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda(t) F_1(x(t), y(t), z(t)) \\ \frac{dy}{dt} = \lambda(t) F_2(x(t), y(t), z(t)) \\ \frac{dz}{dt} = \lambda(t) F_3(x(t), y(t), z(t)) \end{cases}$$

$$\lambda(t) dt = \frac{dx}{F_1(x, y, z)} = \frac{dy}{F_2(x, y, z)} = \frac{dz}{F_3(x, y, z)}$$

dvs

$$\boxed{\frac{dx}{F_1(x, y, z)} = \frac{dy}{F_2(x, y, z)} = \frac{dz}{F_3(x, y, z)}}$$

Ibland kan man separera variablerna,
dvs skriva på formen

$$P(x)dx = Q(y)dy = R(z)dz$$

Då kan man lösa ekvationerna
genom att integrera.

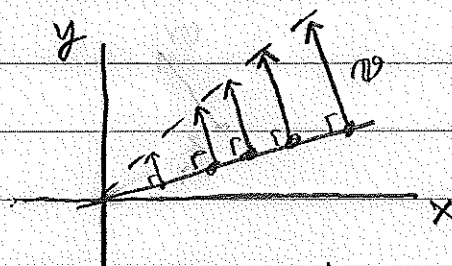
Exempel Rotation kring z-axeln.
 $\vec{v} = \Omega \times \vec{r}$ med $\Omega = \Omega \hat{k}$,

(4)

$$\vec{v}(x, y) = \Omega (-y \hat{i} + x \hat{j}) \left[\frac{m}{s} \right], \quad \Omega > 0 \left[\frac{1}{s} \right]$$

Obs att farten är $v = |\vec{v}| = \Omega \sqrt{y^2 + x^2} = \Omega r$

och att $\vec{v} \cdot \vec{r} = 0$.



Detta är hastighetsfältet för stelkroppens rotation med vinthastighet $\Omega \left[\frac{1}{s} \right]$

Strömlinjerna ges av

$$\frac{dx}{-\Omega y} = \frac{dy}{\Omega x} \quad \text{dvs} \quad -\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$$

Separera variablerna:

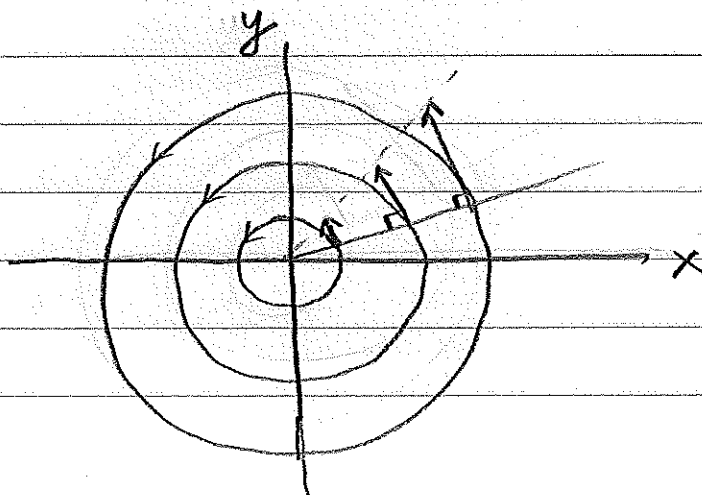
$$x dx = -y dy$$

Integrera: $\int x dx = - \int y dy$

$$\frac{1}{2} x^2 = -\frac{1}{2} y^2 + C$$

$$x^2 + y^2 = 2C$$

Strömlinjerna är cirklar med centrum i origo!



Konservativa fält (15.2 sid 866-868) ⁽⁵⁾

Definition

Om $F = \nabla\phi$ i området D så är

F ett konservativt fält i D och

funktionen ϕ kallas potential

till F i D .

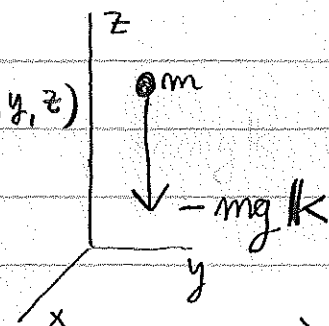
(I mekanik och ellära skrivs

$F = -\overset{\text{obs}}{\nabla}\phi$, så att kraften F pekar
dit potentialen ϕ minskar.)

Exempel Tyngdkraftfältet

$$F(x, y, z) = -mg\mathbf{k} = +\nabla\phi(x, y, z)$$

$$\phi(x, y, z) = -mgz$$



(I mekanik: $\phi(x, y, z) = +mgz$, $F = -\overset{\text{obs}}{\nabla}\phi = -mg\mathbf{k}$)

Potentialen ges av ekv.:

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} = -mg \end{cases}$$

Hur testa om $\mathbb{F}$ är konservativt?

Här är ett nödvändigt villkor.

Antag att $\mathbb{F}$ är konservativt, dvs $\mathbb{F} = \nabla\phi$ i D .

Då gäller:
$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

Men $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$ så att $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$.

På samma vis får vi

$$\left[\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y} \text{ i } D \right]$$

Dessa villkor är nödvändiga men inte tillräckliga.

Ytterligare villkor på D behövs för att garantera att $\mathbb{F}$ är konservativt i D .

Se Sats 4 i 16.2 och FÖ 6.2.

Om potentialen finns kan den bestämmas genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = F_1 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = F_2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = F_3 \end{cases}$$

Exempel $v(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = -1 \neq \frac{\partial v_2}{\partial x} = 1$$

$\Rightarrow$ ej konservativt.

Exempel $F = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ okej

Försök hitta en potential: $\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = x \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = y \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + f(y, z) \\ \phi(x, y, z) = \frac{1}{2}y^2 + h(x, z) \\ \phi(x, y, z) = k(x, y) \end{cases}$

Välj $f(y, z) = \frac{1}{2}y^2 + C$, $h(x, z) = \frac{1}{2}x^2 + C$, $k(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + C$

Då fås $\phi(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C$. Alltså: konservativt.

Kurvintegralen 15.3

18

Kurva på parameterform:

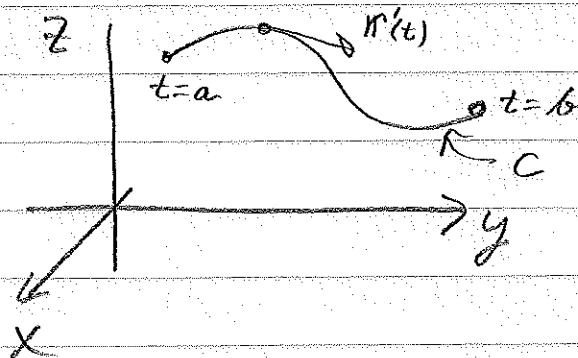
$$C: \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad t \in I = [a, b]$$

Kom ihåg båglängdselementet

$$ds = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

Kurvintegralen av f längs C är

$$\underbrace{\int_C f ds}_{\text{tecknas så}} = \int_a^b \underbrace{f(\mathbf{r}(t)) \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|}_{\text{beräknas så}} dt$$

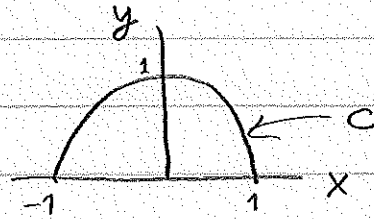


Exempel Massan av en tråd med variabel densitet $\delta(x, y, z) \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}} \right]$:

$$M = \int_C \delta ds = \int_a^b \delta(x(t), y(t), z(t)) \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt \quad [\text{kg}]$$

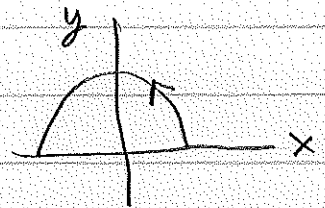
$\underbrace{\quad}_{ds} dm = \delta ds$ masselementet

Exempel $I = \int_C y \, ds$ där C är övre halvcirkeln.



1) Parametrisera kurvan:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t \in [0, \pi]$$



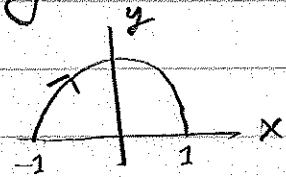
Tangent: $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\sin(t) \mathbf{i} + \cos(t) \mathbf{j}$, $|\frac{d\mathbf{r}}{dt}| = 1$

Båglängdselementet: $ds = |\frac{d\mathbf{r}}{dt}| dt = dt$

Integralen: $I = \int_C y \, ds = \int_0^\pi \sin(t) \, dt = 2$

2) En annan parametrisering:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}, t \in [-1, 1]$$



Tangent: $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \mathbf{j}$, $|\frac{d\mathbf{r}}{dt}| = \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

$$ds = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$I = \int_C y \, ds = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_{-1}^1 dt = 2$$

Viktigt: $\int_C f ds = \int_a^b f(r(t)) \left| \frac{dr}{dt} \right| dt$

(10)

beror ej på valet av parametrisering
dvs alla parametriseringar av C ger
samma resultat. Vi bevisar inte
detta, men vi såg att det
stämde i förra exemplet.

Kurvan C och $\int_C f ds$ har ingen
riktning i sig själv.

Men när vi valt en
parametrisering så genomlöps
kurvan i en viss riktning
som bestäms av parametriseringen.

Även farten bestäms av
parametriseringen.