RÖ 3. KEDJEREGELN, LINJÄRISERING

Kedjeregeln

1D: $\frac{d}{dx} f(g(h(x))) = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dh} \frac{dh}{dx} = \frac{df}{dx}$

2D: $\frac{\partial}{\partial x} f(g(u(x)), h(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial g} \frac{dg}{du} \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$

Derivera varje argument till f m.a.p. x och lägg ihop.
Om funktionen man deriverar bara beror på en variabel används vanligt d.

12.5.3. Beräkna $\frac{\partial z}{\partial u}$ om $z = g(x,y)$, $y = f(x)$ och $x = h(u,v)$.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} g(h(u,v), f(h(u,v))) = \frac{\partial g}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial f} \frac{df}{dh} \frac{\partial h}{\partial u} = g_1 h_1 + g_2 f' h_1$$

f beror bara av ett argument, därför f'

12.5.9. Beräkna $\frac{\partial}{\partial x} f(2x, 3y)$ då $f(x,y)$ har kontinuerliga förstaderivator.

Vi noterar att $f(2x,3y) = f(g(x), h(y))$ där $g(x) = 2x$ och $h(y) = 3y$, så

$$\frac{\partial}{\partial x} f(2x,3y) = \frac{\partial}{\partial x} f(g(x), h(y)) = \frac{\partial}{\partial g} f(g,h) \underbrace{\frac{dg}{dx}}_{=2} + \frac{\partial}{\partial h} f(g,h) \underbrace{\frac{dh}{dx}}_{=0} = \left\{ g \text{ första argumentet till } f \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial g} = f_1 \right\} = 2 f_1(g(x), h(y)) = 2 f_1(2x, 3y)$$

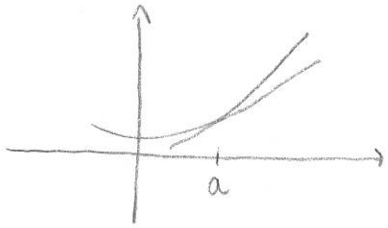
Alltså har vi uttryckt $\frac{\partial}{\partial x} f(2x,3y)$ i f_1. ($\frac{\partial}{\partial x} f(2x,3y)$ är ej $f_1(2x,3y)$ eftersom vi då skulle ha deriverat m.a.p. $2x$ och inte x)

Linjärisering

1. 1D. Approximera en funktion f(x) med dess tangent.

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) = L(x)$$

stämmer bra nära a.



1. 2D: Approximera f(x,y) med dess tangent-plan.

$$f(x,y) \approx f(a,b) + f_1(a,b)(x-a) + f_2(a,b)(y-b) = L(x,y)$$

Stämmer bra nära (a,b)

12.6.2. Använd lämplig linjärisering för att approximera $f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ i (3.01, 2.99).

Vi linjäriserar runt punkten (3,3)

$$L(x,y) = f(3,3) + f_1(3,3)(x-3) + f_2(3,3)(y-3) \quad \text{där}$$

$$f_1 = \frac{\partial}{\partial x} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot -\frac{y}{x^2}$$

$$\left(\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$f_2 = \frac{\partial}{\partial y} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x}$$

Så $L(x,y) = \arctan\left(\frac{3}{3}\right) + \left(-\frac{3}{9}\right) \cdot \frac{1}{1+1^2}(x-3) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+1^2}(y-3)$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}(x-3) + \frac{1}{6}(y-3).$$

Nu kan vi använda L(x,y) för att approximera f(3.01, 2.99)

$$f(3.01, 2.99) \approx L(3.01, 2.99) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} \cdot 0.01 - \frac{1}{6} \cdot 0.01 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \cdot 0.01$$

Differential

Differentialen df till en funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ uppfyller

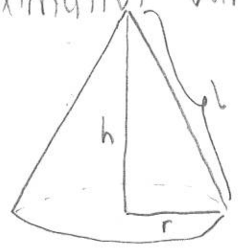
$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Det är en linjär approximation av Δf, som beskriver hur mycket funktionsvärdet ändras då funktionens argument ändras.

hur mycket ändras $x_1, \dots, x_n$?

hur mycket ändras då f?

12.6.13. Mätdatan $r = 25$ ft och $h = 21$ ft är korrekt till 0.5 in noggrannhet. Hur stort kan felet i mantelarea av en kon med radie r och höjd h då approximativt vara?



Arean $A = \pi r l = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$

$1 \text{ in} = \frac{1}{12} \text{ ft}$.

Hur förändras arean då radie och höjd ändras? Kolla differentialen!

$$dA = \frac{\partial A}{\partial r} dr + \frac{\partial A}{\partial h} dh = \pi \left(\sqrt{r^2 + h^2} + r \frac{\cdot 2r}{2\sqrt{r^2 + h^2}} \right) dr$$

$$+ \pi r \frac{2h}{2\sqrt{r^2 + h^2}} dh$$

Vi har $r = 25$, $h = 21$, $dr = \frac{0.5}{12}$, $dh = \frac{0.5}{12}$ (största felet blir om r och h har så stort fel som möjligt)

$\Rightarrow$

$$dA = \pi \left(\sqrt{25^2 + 21^2} + \frac{25^2}{\sqrt{25^2 + 21^2}} \right) \cdot \frac{1}{24} + \frac{\pi \cdot 25 \cdot 21}{\sqrt{25^2 + 21^2}} \cdot \frac{1}{24} \approx 8.88 \text{ ft}^2.$$

Riktiga arean $A = \pi \cdot 25 \cdot \sqrt{25^2 + 21^2} \approx 2564 \text{ ft}^2$

Arean beräknad med mätdata, $A_m \in A \pm dA = [2564 - 8.88, 2564 + 8.88]$ ungefärligt.