FÖ 5.1

Finita elementmetoden i 1-D

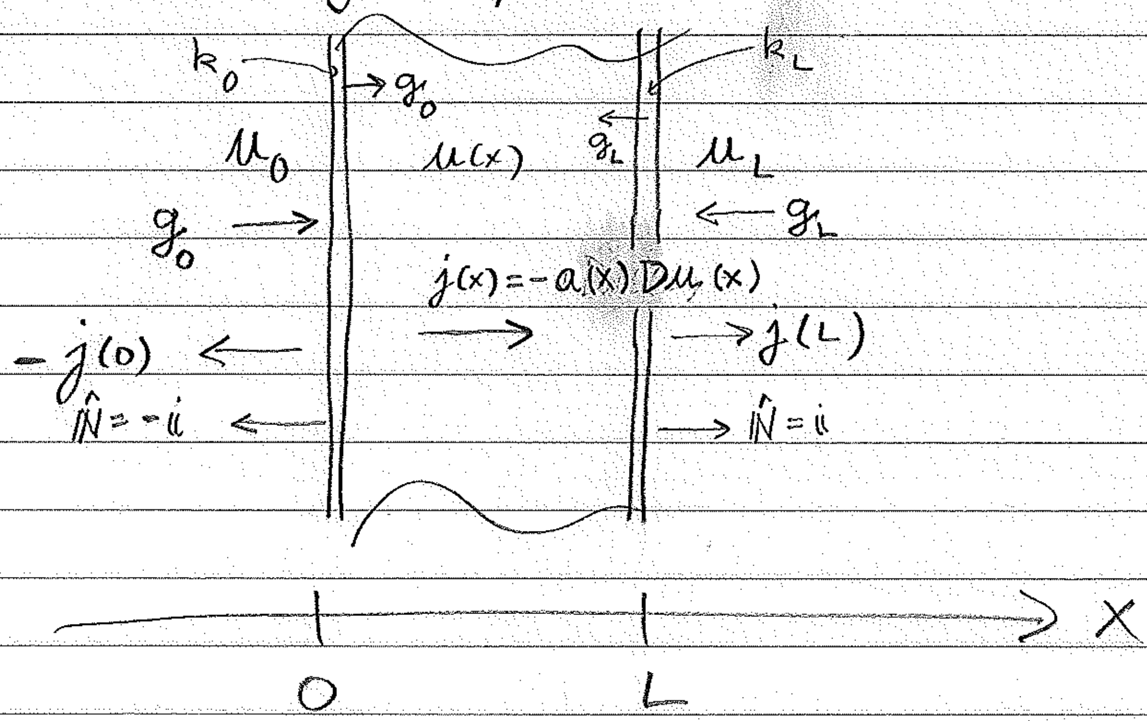
Randvärdesproblem:

Finn $u = u(x)$ sådan att
(stark formulering)

$$\begin{cases} -D(a\,Du) = f & \text{för } x \in I = (0, L) \\ a\,D_N u + k(u - u_A) = g & \text{för } x = 0, L \end{cases}$$

$$D_N = \begin{cases} -\dfrac{d}{dx}, & x = 0 \\ \dfrac{d}{dx}, & x = L \end{cases} \qquad k = \begin{cases} k_0 \\ k_L \end{cases}, \quad u_A = \begin{cases} u_0 \\ u_L \end{cases}, \quad g = \begin{cases} g_0 \\ g_L \end{cases}$$

Värmeledning i platta:



Svag formulering:

Finn $u = u(x)$ sådan att

$$\int_0^L a\, Du\, Dv\, dx + k_0 u(0) v(0) + k_L u(L) v(L) =$$

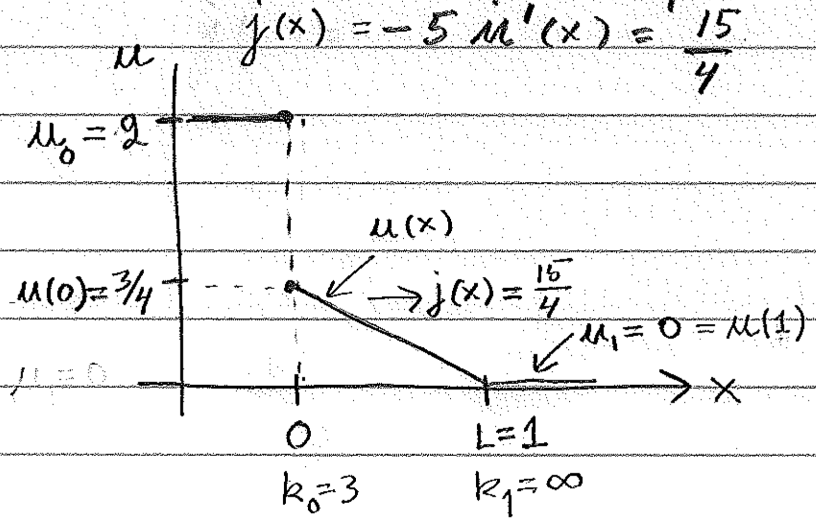
$$= \int_0^L f v\, dx + (k_0 u_0 + g_0) v(0) + (k_L u_L + g_L) v(L)$$

för alla testfunktioner $v = v(x)$.

Exempel
$$\begin{cases} -D(5\,Du) = 0 & i \quad I = (0,1) \\ -5u'(0) + 3(u(0) - 2) = 0 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

Kan lösas genom att integrera två gånger:

$$u(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}(1-x)$$
$$j(x) = -5u'(x) = \frac{15}{4}$$



Svag form:

Finn $u = u(x)$ sådan att $u(1) = 0$ och

$$\int_0^1 5\, u'(x)\, v'(x)\, dx + 3(u(0) - 2)\, v(0) = 0$$

för alla v med $v(1) = 0$.

Läs om stångens ekvation, FEM-1 sid 4.

Finita elementmetoden

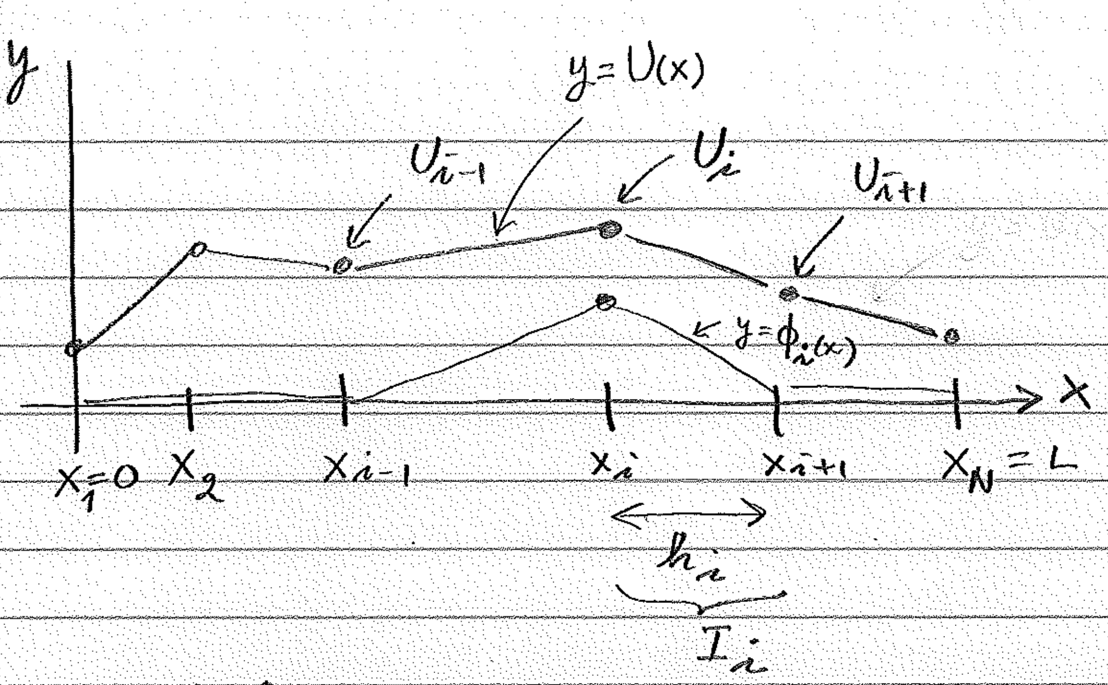
Beräkna en approximativ lösning $U = U(x)$ som är en styckvis linjär funktion.

Nät: $0 = x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_N = L$

med N punkter (noder).

Intervall: $I_i = (x_i, x_{i+1})$, $i = 1, \ldots, N-1$

Steg: $h_i = x_{i+1} - x_i$



Basfunktioner: $\phi_i = \phi_i(x)$ definieras av

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

U är linjär kombination av ϕ_i:

$$U(x) = \sum_{i=1}^{N} U_i \phi_i(x)$$

Obs att

$$U(x_j) = \sum_{i=1}^{N} U_i \phi_i(x_j) = U_j$$

Detta är detsamma som Matlabs plot gör.

Hur ska vi bestämma de okända nod-värdena U_i ?

```
Matlab: >> N=9   % nio punkter
        >> p = linspace(0,1,N) % nät
        >> plot(p, sin(7*p), '*-') % styckvis linjär funktion
```

Använd den svaga formuleringen med testfunktionerna $v = \phi_j$.

För enkelhets skull: $k_0 = k_L = 0$, $g_0 = g_L = 0$.

$$\int_0^L a\,Du\,Dv\,dx = \int_0^L f\,v\,dx$$

Sätt in $U(x) = \sum_{i=1}^{N} U_i \phi_i(x)$

och $v = \phi_j$, $j = 1, \dots, N$.

Vi får

$$\sum_{i=1}^{N} U_i \underbrace{\int_0^L a\,D\phi_i\,D\phi_j\,dx}_{= a_{ij} = a_{ji}} = \underbrace{\int_0^L f\,\phi_j\,dx}_{= b_j}$$

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ji} U_i = b_j \quad , \quad j = 1, \dots, N$$

$$AU = b$$

A är <u>styvhetsmatrisen</u> $N \times N$

b är <u>lastvektorn</u> $N \times 1$

A är <u>symmetrisk</u> ($a_{ij} = a_{ji}$)

och <u>tridiagonal</u>:

$$A = \begin{bmatrix} * & * & & & 0 \\ * & * & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & & & * & * \end{bmatrix}$$

Ekvationssystemet ställs upp och löses av datorprogrammet MyPoissonSolver.m i Datorövning 4.

Datorövning 4

Känna igen och veta betydelsen av alla termer i randvärdesproblemet och FEM.

$$\begin{cases} -D(a(x)Du(x)) + d(x)Du(x) + c(x)u(x) = f(x), & x \in (K, L) \\ a(x)D_N u(x) + k(u(x) - u_A(x)) = g(x), & x = K,\ x = L \end{cases}$$

Ladda ned filerna "MyPoissonSolver.m" "BdryData1.m", "EqData1.m"

```
>> [U,A,b] = MyPoissonsolver(p,t,e,@EqData1,@BdryData1)
```

Ställer upp och löser $AU = b$.
Skapa först ett nät:

```
>> m = 9, K=0, L = 1
>> p = linspace(K,L,m)          ( 9 punkter)
>> t = [1:m-1; 2:m; ones(1,m-1)] ( 8 intervall )
>> e = [1 m; 1 2]               ( 2 randpunkter)
```

I "EqData.m" anges: a, d, c, f.
I "BdryData.m" anges: k, u_A, g.

Obs: randvillkor av typen $u = u_A$, $k = \infty$, anges med ett stort värde $k = 1e8$.