

SAMMANFATTNING. TEORIFRÅGOR.

Teorifrågor är inrutade nedan. Glöm inte läsa på Datorövningarna!

Kap 11.1. Vektorvärd funktion $\mathbf{v}(t)$. Deriveringsregler, Sats 1.

Kap 11.3. Parametrisering av kurvor: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$

Tangent (hastighet): $\mathbf{v} = \mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$

Fart: $v = |\mathbf{v}|$. Acceleration: $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$

Längd: $L = \int_a^b \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt$ Båglängd: $s = \int_a^t \left| \frac{d\mathbf{r}}{du} \right| du$

Båglängdselement: $ds = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt$

Båglängdsparametrisering: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, $0 \leq s \leq L$

Fart: $v = |\mathbf{T}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = 1$

Kap 11.4. Krökning. Endast sid 644–646.

I båglängdsparametrisering: enhetstangenten $\hat{\mathbf{T}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$

Krökning: $\kappa(s) = \left| \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} \right|$. Krökningsradie: $\rho(s) = 1/\kappa(s)$.

Derivering av $1 = |\hat{\mathbf{T}}|^2 = \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{T}}$, ger $0 = 2\hat{\mathbf{T}}(s) \cdot \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}$, så att en normal fås av $\mathbf{N}(s) = \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}$.

Enhetsnormalen: $\hat{\mathbf{N}}(s) = \frac{\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}}{\left| \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} \right|}$

Binormalen: $\hat{\mathbf{B}}(s) = \hat{\mathbf{T}}(s) \times \hat{\mathbf{N}}(s)$

Kap 11.5. Krökning i allmän parametrisering. Endast sid 651 och Exempel 2 sid 653.

Exempel 2. Graf: $y = f(x)$. Kunna formeln $\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}$

Kap 12.1. Visualisering.

Graf: $z = f(x, y)$

Nivåkurvor: $f(x, y) = C$

Nivåytor: $f(x, y, z) = C$

MATLAB: `plot3`, `meshgrid`, `mesh`, `meshc`, `surf`, `surfc`, `slice`

Kap 12.2. Definition av gränsvärde.

$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$

dvs $f(x, y) \rightarrow L$ då avståndet $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \rightarrow 0$.

Kunna avgöra om gränsvärde existerar i enkla fall.

Definition av kontinuitet.

Kap 12.3. Definition av partiell derivata.

Graf: $z = f(x, y)$. Beräkna tangenter, normalvektor och tangentplanets ekvation (sid 686–687).

Kap 12.4. Partiella derivator av högre ordning.

Kunna Sats 1 (Blandade derivator är lika) utan bevis.

Exempel 3 (Laplaces ekvation). Exempel 4 (Vågekvationen).

Kap 12.5. Kedjeregeln. Endast sid 695–698 och Exempel 10, sid 702.

Kap 12.6. Deriverbarhet (sid 705–711).

Linjäriseringen: $L(x, y) = f(a, b) + f'_1(a, b)h + f'_2(a, b)k$, $h = x - a$, $k = y - b$

Funktionen $f(x, y)$ är deriverbar i (a, b) om linjäriseringen är en bra approximation till $f(x, y)$ nära (a, b) . Mera precist (Definition 5): om

$$\lim_{\sqrt{h^2+k^2} \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - f'_1(a, b)h - f'_2(a, b)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Sats 3 utan bevis.

Sats 4 (Om partiella derivatorna kontinuerliga i omgivning till (a, b) så är f deriverbar i (a, b) .)

Utan bevis.

Sats 5 (Kedjeregeln.) Utan bevis.

Jacobi och Newton. Linjärisering. Jacobimatrix. Newtons metod.

Kunna skriva dessa saker på matrisform. Kedjeregeln på matrisform.

Teori: Härledning av Newtons metod med hjälp av linjärisering.

Kunna skriva ned algoritmen med MATLAB-beteckningar:

```
function x = newton(f,x0,tol)
```

```
x = x0;
```

```
h = tol + 1;
```

```
while norm(h)>tol
```

```
    A = jacob(f,x);           % evaluate the Jacobian A=Df(x)
```

```
    b = -f(x);                % evaluate the residual b=-f(x)
```

```
    h = A\b;                  % solve the linearized equation
```

```
    x = x + h;                % update
```

```
end
```

Kap 12.7. Gradient och riktningsderivata. (Ej “Rates perceived...” sid 722.)

Nabla-operatorn: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$

Teori: Sats 6 (Gradienten är normalvektor till nivåkurva.) Med bevis.

Definition av riktningsderivata: $D_{\mathbf{u}}f(a, b) = \left. \frac{d}{dt}f(a + tu, b + tv) \right|_{t=0}$.

Teori: Sats 7 ($D_{\mathbf{u}}f(a, b) = \mathbf{u} \cdot \nabla f(a, b)$) Med bevis.

Tolkning av gradienten som den riktning dit f ökar mest.

Kap 12.9. Taylors formel. Endast Taylor-polynom av grad ≤ 2 :

$$\begin{aligned} P_2(x, y) &= f(a, b) + f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k + \frac{1}{2}(f''_{xx}(a, b)h^2 + 2f''_{xy}(a, b)hk + f''_{yy}(a, b)k^2) \\ &= f(a, b) + [f'_x(a, b) \quad f'_y(a, b)] \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f''_{xx}(a, b) & f''_{xy}(a, b) \\ f''_{xy}(a, b) & f''_{yy}(a, b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

med Jacobi-matrisen (gradientvektorn) och Hesse-matrisen

$$f'(a, b) = \nabla f(a, b) = [f'_x(a, b) \quad f'_y(a, b)], \quad f''(a, b) = D^2 f(a, b) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(a, b) & f''_{xy}(a, b) \\ f''_{xy}(a, b) & f''_{yy}(a, b) \end{bmatrix}$$

Kap 13.1. Extremvärdesproblem.

Sats 1 (Nödvändiga villkor för extremvärde.) Utan bevis.

Sats 2 (Tillräckliga villkor för extremvärde.) Utan bevis.

Sats 3 (Andra-derivata-testet.) Utan bevis.

Kunna undersöka funktion $f: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ med avseende på extrempunkter (max, min, sadelpunkter) med hjälp av Sats 1 och Sats 3. Använd ej “Remark” sid 750! Det är en ointressant handräkningsmetod som bara fungerar då $N = 2$. Godkänns ej på tentamen.

Kap 13.2. Extremvärdesproblem i begränsat område. Ej "Linear programming".

Kunna söka max och minpunkter: inre singulär punkt eller inre kritisk punkt eller randpunkt.

Kap 13.3. Lagranges multiplikatormetod.

Kap 14.1. Dubbelintegralen.

Kunna definiera dubbelintegralen $\iint_D f \, dA$ som gränsvärde av Riemann-summa.

Kunna integralens egenskaper sid 811 utan bevis.

Kap 14.2. Kunna beräkna dubbelintegral med upprepad integration om området är enkelt i y -led eller enkelt i x -led.

Kap 14.3. Generaliserad dubbelintegral. Medelvärdessatsen.

Integralen $\iint_D f(x, y) \, dA$ är generaliserad om D är obegränsad eller om f är obegränsad i D .

Om $f(x, y) \geq 0$ i D så är integralen antingen konvergent eller så divergerar den mot oändligheten. Då kan man avgöra om integralen är konvergent eller divergent genom upprepad integration.

Sats 3 (Medelvärdessatsen.) Utan bevis.

Kap 14.4. Polära koordinater.

Viktigt att kunna räkna med polära koordinater.

Areaelementet: $dA = r \, dr \, d\theta$

Allmän variabeltransformation:
$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

Areaelementet: $dA = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du \, dv$

obs: det är absolutbeloppet av Jacobi-determinanten (determinanten av Jacobi-matrisen)

Kap 14.5. Trippelintegralen $\iiint_D f \, dV$

Kan beräknas med upprepad integration om området är enkelt.

Kap 14.6. Variabeltransformation.

Allmän variabeltransformation:
$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$$

Volymselementet: $dV = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du \, dv \, dw$

obs: det är absolutbeloppet av Jacobi-determinanten (determinanten av Jacobi-matrisen)

Cylinderkoordinater. Viktigt!

Sfäriska koordinater. Viktigt!

Kap 14.7. Endast "Moments and Centres of Mass" sid 850–854.

FEM1. Randvärdesproblem i 1-D. Finita elementmetoden.

$$-D(a(x)Du(x)) = f(x), \quad \text{för } x \in I = (K, L),$$

$$a(x)D_n u(x) + k(x)(u(x) - u_A) = g(x), \quad \text{för } x = K, x = L.$$

Känna igen och känna betydelsen av alla termer i randvärdesproblemet för värmeledning och mekanik.

Teori: Härled den svaga formuleringen för problem av denna typ.

Kunna lösa enkla specialfall genom upprepad integration.

Kunna använda MATLAB-programmet `MyPoissonSolver.m`.

Teori: Kunna härleda finita elementmetoden.

Kap 15.1. Vektorfält. Skälärt fält. Fältlinjer. (Sid 859–862.)

Kap 15.2. Konservativt fält om $\mathbf{F} = \nabla\phi$. (Sid 866–868.)

Kap 15.3. Kurvintegral.

Parametrisera kurvan, sedan $\int_C f \, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt$.

Beror ej på valet av parametrisering.

Kap 15.4. Tangentkurvintegral.

Integrera tangentskomponenten av vektorfält:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}} \, ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt.$$

Tangentbåglängdselementet: $d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{T}} \, ds = \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$.

Sats 1 (Oberoende av vägen.) Utan bevis.

Kap 15.5. Ytintegral. Ej "The attraction ..." sid 895.

Parametrisera ytan S , $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, dvs

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad a \leq u \leq b, c \leq v \leq d.$$

Koordinatkurvor:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0), \quad a \leq u \leq b,$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v), \quad c \leq v \leq d.$$

Tangenter: $\frac{\partial \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\partial v}$

En normalvektor: $\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\partial v}$

Areaelementet: $dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du \, dv$

Ytintegralen: $\iint_S f \, dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du \, dv$

Teori: Graf: $z = f(x, y)$. Härled ytelementet $dS = \sqrt{1 + f'_x(x, y)^2 + f'_y(x, y)^2} \, dx \, dy$

Kunna parametrisera ytor med hjälp av cylinderkoordinater och sfäriska koordinater.

Kap 15.6. Flödesintegral (normalytintegral).

Orienterbar yta: har enhetsnormalvektorfält $\hat{\mathbf{N}}$ som varierar kontinuerligt över S .

Orienterad yta: när vi valt ett sådant normalvektorfält ("upp eller ned") säger vi att ytan är orienterad. Vi har valt en orientering.

Tangenter: $\frac{\partial \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\partial v}$

Välj normalvektor: $\mathbf{N} = \pm \frac{\partial \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\partial v}$ (välj tecken "upp eller ned")

Enhetsnormalvektor: $\hat{\mathbf{N}} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}$

Normalytelementet: $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{N}} \, dS = \left(\pm \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du \, dv$

Integrera normalkomponenten av vektorfält:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left(\pm \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du \, dv.$$

Kap 16.1. Div, grad, rot.

Kunna definition av dessa deriveringsoperatorer.

Kap 16.2. Deriveringsregler för div, grad, rot.

Teori: Sats 3. Bevis av a,b,c,d,g,h.

Sats 4 utan bevis.

FEM2. Randvärdesproblem i flera variabler. Finita elementmetoden.

Teori: Härled följande partialintegrationsformel i tre variabler:

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \phi \, dV = \iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F} \phi \, dS - \iiint_D \mathbf{F} \cdot \nabla \phi \, dV$$

Teori: Härled värmeledningsekvationen: $-\nabla \cdot (a \nabla u) = f$ i D .

Känna igen och känna betydelsen av alla termer i randvärdesproblemet för värmeledning:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a \nabla u) = f & \text{i } D, \\ a D_{\hat{\mathbf{N}}} u + k(u - u_A) = g & \text{på } S_2 \text{ (Neumann/Robin),} \\ u = u_A & \text{på } S_1 \text{ (Dirichlet),} \end{cases}$$

Teori: Härled den svaga formuleringen för problem av denna typ.

Kunna skriva ned randvillkor för diverse värmeledningsproblem.

Kunna skriva in randvillkor i PDE Toolbox.

Kap 16.3. Greens formel i planet.

Sats 7 utan bevis. Mycket viktig.

Kap 16.4. Teori: Formulera Gauss divergenssats i rummet (Sats 8). Utan bevis. Mycket viktig!

Sats 9 utan bevis. Mindre viktig.

Kap 16.5. Stokes sats utan bevis. Mindre viktig.