

Tentamen i MVE255 Matematisk analys i flera variabler M, Övningstentamen 2014

Telefon: Anders Martinsson 0703-088304

Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Uppgift 1 och 2, totalt 20 poäng, bedöms huvudsakligen på svaret.

Uppgift 3–7 är värda 6 poäng vardera, totalt 30. De bedöms även på hur väl formulerade lösningarna är. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng! Renskriv lösningarna, lämna inte in kladdpapper.

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost. Granskning: onsdag 19 juni, 10–12, hos Stig Larsson.

1. Frågor om datorövningarna. Här krävs tillfredställande svar på alla 5 delfrågorna. Varje deluppgift är värd 1 poäng, totalt 5.

- (a) Vad används Matlab-funktionen `plot3` till?
- (b) Hur deriverar man funktionen $\sin(x_1x_2)$ i punkten $(1,2)$ med hjälp av `jacobi.m`?
- (c) Hur beräknar man Hesse-matrisen till en funktion $f(x)$ med Matlab?
- (d) Vilka randvillkor har man när filen `BdryData.m` innehåller koden

```
if tag==1 k=1; uA=0; g=0; end
if tag==2 k=1e8; uA=3/2; g=0; end
```

- (e) PDE Toolbox har dessa beteckningar för randvillkor:

$$\begin{aligned} n \cdot (c\nabla u) + qu &= g && \text{på } S_2 \text{ (Neumann),} \\ hu &= r && \text{på } S_1 \text{ (Dirichlet).} \end{aligned}$$

Vad ska man fylla i för värden på en rand som är perfekt isolerad och utan värmekällor?

2. Varje deluppgift är värd 3 poäng, totalt 15.

- (a) Bestäm arbetet som uträttas av kraftfältet $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$ på en partikel som rör sig längs kurvan $C: \mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \ln(t)\mathbf{k}$, $t \in [0, 1]$.

- (b) Undersök gränsvärdet $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^2 + y^2}$. Ändring: sådan uppgift kommer inte på tentan i år.

- (c) Bestäm tangentlinjen till kurvan $C: \mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \ln(t)\mathbf{k}$ i punkten $(2, 1, 0)$. Tangentlinjen ska anges på parameterform.

- (d) Beskriv hur man plottar kurvan $C: \mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \ln(t)\mathbf{k}$, $t \in [0, 1]$ i Matlab.

- (e) Beräkna integralen

$$\iint_R e^{x/y} dA,$$

där R är området som begränsas av positiva y -axeln, linjen $y = 1$ och kurvan $y = \sqrt{x}$.

- 3.** (a) Bestäm alla lokala max-, min- och sadelpunkter till funktionen $f(x, y) = x^2 - xy + y^3$. (3 p)
(b) Beskriv hur man gör detta med Matlab. (3 p)

- 4.** (a) Randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} -D(a(x)Du(x)) &= 0 && \text{för } x \in (0, L), \\ u(0) &= u_0, \quad u(L) = u_L, \end{aligned}$$

beskriver ett värmeledningsproblem. Beskriv med ord vilket värmeledningsproblem det är. Ange vad de olika termerna betyder. (Skriv kortfattat och bra, annars ingen poäng.)

- (b) Lös detta randvärdesproblem med $a(x) = \frac{k}{1 + x/L}$ där k är en konstant.

(c) Antag att $u_0 - u_L = 10$ K och $k = 10$ J/(mKs). Bestäm tjockleken L så att värmeflödestätheten blir 100 J/(m²s).

5. Beräkna integralen $\iiint_R x \, dV$, där R är den första oktanten av enhetsklotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

6. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ uppåt genom ytan S som är den del av paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför xy -planet.

7. Härled partialintegrationsformeln

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \phi \, dV = \iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F} \phi \, dS - \iiint_D \mathbf{F} \cdot \nabla \phi \, dV$$

/stig

Svar uppgift 1.

(a) Den används för att plotta en kurva på parameterform.

(b)

```
>> A=jacobi(@(x)sin(x(1)*x(2)), [1;2])
```

(c) Om funktionen är i filen `funk1.m` så kan man bilda den transponerade gradienten genom `gradfunk1=@(x)(jacobi(@(funk1,x))')` och sedan Hesse-matrisen genom `H=jacobi(gradfunk1,x)`

(d) $-aDu(0) + u(0) = 0$ och $u(L) = 3/2$.

(e) Välj Neumann och sedan $q = 0$ och $g = 0$.

Resten av lösningarna finns i förra årets tenta.