

Satslista

I följande dokument finns teoretiska resultat samlade. För många resultat räcker det att kunna formuleringen, för andra ska också beviset kunnas. Det står angivet vid varje sats om det räcker med formulering eller om bevis krävs. Nedan följer en lista med de 10 absolut viktigaste resultaten, lär er dessa först:

1. Härleda Newtons metod med hjälp av linjärisering (inte i detta dokumentet, se pdf om Newtons metod)
2. Härleda att gradienten är normalvektor till nivåkurva (8)
3. Bevis formeln för riktningsderivata (9)
4. Härleda ytelement för grafen $z = f(x, y)$ (specialfall och del av 17)
5. Bevisa deriveringsregler för div, grad och rot (22)
6. Härleda partiell integration i tre variabler (19)
7. Härleda värmeledningsekvationen (står ej i detta dokument, se pdf om värmeledningsekvationen)
8. Ta fram svag formulering av en PDE (står ej i detta dokument, se pdf om FEM)
9. Ta fram FEM-formuleringen av en PDE (står ej i detta dokument, se pdf om FEM)
10. Formulera Gauss sats (Divergenssatsen), huvudvarianten (25)

1 Läsvecka 1

Sats 1 (Deriveringsregler vektorvärd funktion (med bevis)).

Givet: $\mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alla deriverbara. Då gäller att $\mathbf{u} + \mathbf{v}, \lambda \mathbf{u}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ och $\mathbf{u} \circ \lambda$ är deriverbara, samt reglerna:

$$(a) (\mathbf{u} + \mathbf{v})' = \mathbf{u}' + \mathbf{v}'$$

$$(b) (\lambda \mathbf{u})' = \lambda' \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u}'$$

$$(c) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}'$$

$$(d) (\mathbf{u} \times \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}'$$

$$(e) (\mathbf{u}(\lambda(t)))' = \lambda'(t) \mathbf{u}'(\lambda(t))$$

$$(f) |\mathbf{u}'| = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'}{|\mathbf{u}|} \text{ om } \mathbf{u}' \neq 0.$$

Formel 1 (Kurvängd (med skissartad härledning)).

Givet en kurva C med parametrisering $\mathbf{r}(t), a \leq t \leq b$, ges kurvans längd av $L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt$.

Faktum 1 (Kurvtangens och kurvnormal är vinkelräta (med bevis)).

$$\hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{N}} = 0.$$

Sats 2 (Blandade derivator är lika (utan bevis)).

Se formulering i anteckningar/boken.

Formel 2 (Tangentplan och normal till en funktionsyta (med härledning)).

Givet en funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ och en punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, så ges normal till funktionsytan $z = f(x, y)$ i punkten $(a, b, f(a, b))$ av

$$\mathbf{N} = (f'_1(a, b), f'_2(a, b), -1) \quad (1)$$

och tangentplanets ekvation är

$$z = f(a, b) + f'_1(a, b)(x - a) + f'_2(a, b)(y - b). \quad (2)$$

2 Läsvecka 2

Sats 3 (Partiell deriverbarhet och kontinuitet (utan bevis)).

f partiellt deriverbar medför inte att f är kontinuerlig.

Sats 4 (Deriverbarhet och kontinuitet (utan bevis)).

f deriverbar medför att f är kontinuerlig.

Sats 5 (Deriverbarhet och partiell deriverbarhet (utan bevis)).

f deriverbar medför att f är partiellt deriverbar (inte andra hållet).

Sats 6 (Deriverbarhet och partiell deriverbarhet (utan bevis)).

Om $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ är kontinuerliga i en omgivning av (a, b) så är f deriverbar i (a, b) .

Sats 7 (Kedjeregeln (utan bevis)).

Om den yttre funktionen är deriverbar och den inre är partiellt deriverbar så gäller kedjeregeln.

3 Läsvecka 3

Sats 8 (Gradienten är ortogonal till nivåkurvorna (med bevis)).

Om $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är deriverbar i (a, b) och $\nabla f(a, b) \neq 0$, då är $\nabla f(a, b)$ en normalvektor till nivåkurvan till f genom (a, b) .

Sats 9 (Riktderivata (med bevis)).

Om f är deriverbar i (a, b) gäller

$$D_u f(a, b) = u \cdot \nabla f(a, b). \quad (3)$$

Sats 10 (Taylorpolynom av grad 2 (utan bevis)).

Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a, h \in \mathbb{R}^n$ och $x = a + h$. Taylorpolynomet av grad 2 ges av

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}h^T f''(a)h. \quad (4)$$

Sats 11 (Nödvändigt villkor för extrempunkt (med bevis)).

Om $a \in \mathbb{R}^n$ är en extrempunkt till $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gäller att a är en av följande:

- Kritisk punkt
- Singulär punkt
- Randpunkt

Sats 12 (Tillräckligt villkor för extrempunkt (utan bevis)).

Om $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig och $D_f \subset \mathbb{R}^n$ är sluten och begränsad då finns punkter i D_f som har globala max och min.

Sats 13 (Koppling mellan en symmetrisk matris egenvärden och definit/semidefinit/indefinit (utan bevis)).

Låt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vara symmetrisk och $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vara dess egenvärden. Följande gäller:

- Alla $\lambda_i > 0 \iff A$ positivt definit
- Alla $\lambda_i < 0 \iff A$ negativt definit
- Alla $\lambda_i \geq 0 \iff A$ positivt semidefinit
- Alla $\lambda_i \leq 0 \iff A$ negativt semidefinit
- $\lambda_i > 0$ och $\lambda_j < 0 \iff A$ indefinit

Sats 14 (Andra-derivata-testet (med bevis)).

Låt $a \in D_f$ vara en inre kritisk punkt till f . Antag att Hessematrissen f'' är kontinuerlig. Då gäller:

- $f''(a)$ positivt definit $\implies$ lokalt min i a
- $f''(a)$ negativt definit $\implies$ lokalt max i a
- $f''(a)$ indefinit $\implies a$ sadelpunkt

4 Läsvecka 4

Sats 15 (Lagranges multiplikator metod (med skissartat bevis)).

Låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vara deriverbara. Antag att $x_0 \in \mathbb{R}^n$ är en extrempunkt till f under bivillkoret $g(x) = 0$, och att $g'(x) \neq 0$. Då finns ett tal λ_0 så att

$$L'(x_0, \lambda_0) = 0. \quad (5)$$

5 Läsvecka 5

Sats 16 (Medelvärdessatsen för dubbelintegraler (utan bevis)).

Låt $D \subset \mathbb{R}^2$ vara sluten, begränsad och sammanhängande, samt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vara kontinuerlig på D . Då finns $(x_0, y_0) \in D$ så att

$$\iint_D f(x, y) dA = f(x_0, y_0) \cdot \text{area}(D). \quad (6)$$

Sats 17 (Variabelbyte i dubbelintegral (med skissartad härledning)).

Låt $x = x(u, v), y = y(u, v)$ beskriva ett variabelbyte från ett område S i (u, v) -systemet till ett område D i (x, y) -systemet. Då gäller följande:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv. \quad (7)$$

Formel 3 (Relation mellan Jacobideterminanter (utan bevis)).

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}} \quad (8)$$

Sats 18 (Nödvändigt villkor för konservativa fält (med bevis för $\mathbb{R}^2$)).

$\mathbb{F}$ konservativt meför när $\mathbb{F} = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ att

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \quad (9)$$

och när $\mathbb{F} = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ att

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{\partial F_2}{\partial x}, \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} &= \frac{\partial F_3}{\partial x}, \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} &= \frac{\partial F_3}{\partial y}. \end{aligned} \quad (10)$$

6 Läsvecka 6

Formel 4 (Integral av reellvärd funktion längs en kurva (utan bevis)).

$$\int_C f \, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| \, dt \quad (11)$$

Formel 5 (Integral av vektorvärd funktion längs en kurva (utan bevis)).

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt \quad (12)$$

Formel 6 (Integral av reellvärd funktion över en yta (utan bevis)).

$$\int_A f \, dS = \iint f(\mathbf{r}(s, t)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right| \, ds dt \quad (13)$$

Formel 7 (Integral av vektorvärd funktion ut genom en yta (utan bevis)).

$$\int_A \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dS = \pm \iint \mathbf{F}(\mathbf{r}(s, t)) \times \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) \, ds dt \quad (14)$$

7 Läsvecka 7

Sats 19 (Partiell integration i tre variabler (med bevis)).

$$\iiint_D (\nabla \cdot \mathbf{F}) \phi \, dV = \iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F} \phi \, dS - \iiint_D \mathbf{F} \cdot \nabla \phi \, dV \quad (15)$$

Sats 20 (Oberoende av vägen (bevis för (a) medför (c))).

Låt $\mathbf{F}$ vara deriverbar i ett sammanhängande område D . Då är följande påståenden ekvivalenta:

(a) $\mathbf{F}$ är konservativt i D .

(b) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ för alla slutna kurvor i D .

(c) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ har samma värde för alla kurvor som går från $p_0 \in D$ till $p_1 \in D$.

Sats 21 (Kurvintegral av konservativa fält (med bevis)).

Om $\mathbf{F} (= \nabla \phi)$ är konservativt och C är en kurva från p_0 till p_1 gäller:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(p_1) - \phi(p_0). \quad (16)$$

Sats 22 (Räkneregler för gradient, divergens och rotation (med bevis för a, b, c, d, g, h)).

Låt $\phi, \psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ och $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Följande gäller

$$(a) \nabla(\phi\psi) = (\nabla\phi)\psi + \phi\nabla\psi$$

$$(b) \nabla \cdot (\phi\mathbf{F}) = (\nabla\phi) \cdot \mathbf{F} + \phi\nabla \cdot \mathbf{F}$$

$$(c) \nabla \times (\phi\mathbf{F}) = (\nabla\phi) \times \mathbf{F} + \phi\nabla \times \mathbf{F}$$

$$(d) \text{ Adams 16.2 Sats 3}$$

$$(e) \text{ Adams 16.2 Sats 3}$$

$$(f) \text{ Adams 16.2 Sats 3}$$

$$(g) \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$$

$$(h) \nabla \times \nabla\phi = 0$$

Sats 23 (Nödvändigt villkor för konservativt fält (med bevis)).

$\mathbf{F}$ konservativt medför $\mathbf{F}$ rotationsfritt.

Sats 24 (Tillräckligt villkor för konservativt fält (utan bevis)).

$\mathbf{F}$ rotationsfritt i D som är enkelt sammanhängande medför att $\mathbf{F}$ är konservativt i D .

8 Läsvecka 8

Sats 25 (Gauss sats (Divergenssatsen) (utan bevis)).

Låt $D \subset \mathbb{R}^3$ vara ett begränsat område med styckvis glatt orienterad sluten randyta $S = \partial D$. Låt $\hat{\mathbf{N}}$ beteckna randens utåtriktade normalfält och låt $\mathbf{F}$ vara ett glatt vektorfält. Då gäller:

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS. \quad (17)$$

Sats 26 (Varianter av Gauss sats (utan bevis)).

$$\iiint_D \nabla \times \mathbf{F} dV = \iint_S \hat{\mathbf{N}} \times \mathbf{F} dS, \quad (18)$$

$$\iiint_D \nabla \cdot \phi dV = \iint_S \phi \hat{\mathbf{N}} dS. \quad (19)$$

Sats 27 (Gauss sats i planet (utan bevis)).

$$\iint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dA = \int_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} ds. \quad (20)$$

Sats 28 (Stokes sats (utan bevis)).

Låt A vara en styckvis glatt orienterad yta med ytnormal $\hat{\mathbf{N}}$ och vars rand är kurvan C . Då gäller:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_A (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}} dS \quad (21)$$