FÖ 3.3

Lagranges multiplikatormetod 13.3

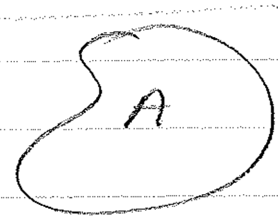
Vi har löst fria optimeringsproblem:

$$\max/\min f(x) \text{ över } x \in D_f = \mathbb{R}^m$$

Här är variabeln x fri (inga restriktioner).

Även över begränsat område:

$D_f = A$ (begränsat)



Speciell undersökning av randen till A.

Villkoret $f'(a)=0$ är meningsfullt endast för inre punkt a.

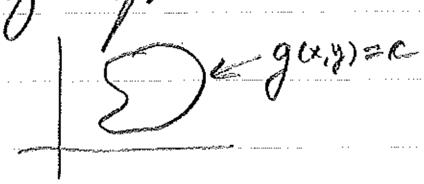
Fria opt.problem är enklare.

Men oftast är opt. problem inte fria: det finns <u>restriktioner</u> och <u>samband</u> mellan variablerna.

<u>Exempel</u>

* minimera $f(x,y)$ under bivillkoret $g(x,y)=c$

Det betyder att minimera f på nivåkurvan $g(x,y)=c$



* minimera $f(x,y)$ under bivillkoret $g(x,y)\leq c$

Det betyder minimera på området innanför nivåkurvan.

Beteckning: <u>likhetsbivillkor</u> $g(x,y)=c$
(equality constraint)

<u>olikhetsbivillkor</u> $g(x,y)\leq c$
(inequality constraint)

Med 3 variabler kan man ha upp till 2 bivillkor:

minimera $f(x,y,z)$ under $g(x,y,z)=c$
och $h(x,y,z)=d$

(Kan alltid ha $c=d=0$.)
(Flytta termer till vänsterledet.)

Mer allmänt med $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$
och $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ där $n < m$:

minimera $f(x)$ under $\underbrace{g(x) = 0}$ bivillkoret

Här: m variabler och n bivillkor.

(Vi kommer inte att diskutera olikhetsbivillkor, men de kan också behandlas med Lagranges metod.)

För sådana problem används Lagranges multiplikatormetod.

Vi presenterar den först i ett enkelt exempel.

Exempel Bestäm max/min för $f(x,y) = xy$ på cirkeln $x^2+y^2=1$.

Eliminationsmetod: eliminera bivillkoret, dvs lös ut $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ och optimera $h(x) = \pm x\sqrt{1-x^2}$.

Detta fungerar här men i allmänhet är det **omöjligt.**

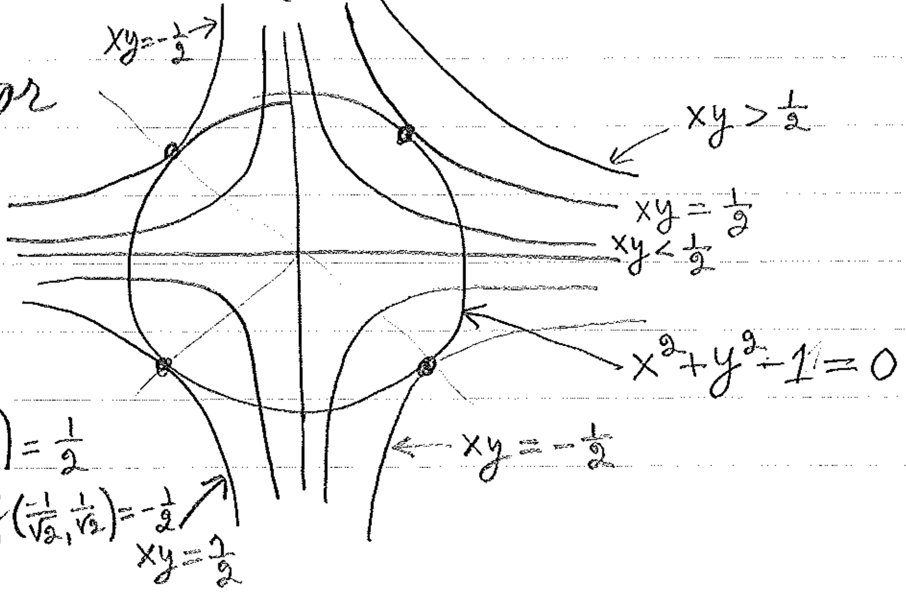
Istället använder vi **multiplikator-metoden.**

Optimera $f(x,y)$

under bivillkoret $g(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$.

Grafisk lösning:

Rita nivåkurvor $f(x,y)=c$ och $g(x,y)=0$.

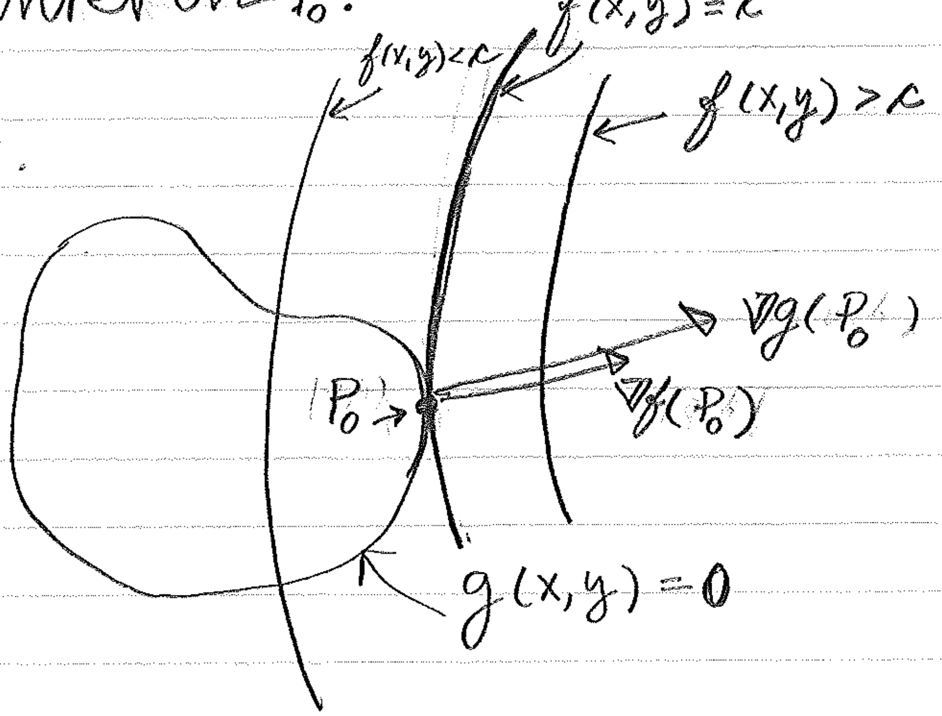


Vi ser att max är $f(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}) = f(\frac{-1}{\sqrt2},\frac{-1}{\sqrt2}) = \frac{1}{2}$

och min är $f(\frac{1}{\sqrt2},\frac{-1}{\sqrt2}) = f(\frac{-1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}) = -\frac{1}{2}$

Grafisk lösning omöjlig oftast. Räkna! Matlab!!

Vi inser att nivåkurvorna för f och g tangerar varandra i extrempunkten P_0.



$f(x,y)=c$, normalvektor $\nabla f(P_0)$

$g(x,y)=0$, normalvektor $\nabla g(P_0)$

Tangeringsvillkor: $\nabla f(P_0)$ parallell med $\nabla g(P_0)$, dvs

$$\nabla f(P_0) = -\lambda_0 \nabla g(P_0)$$

för något tal λ_0. (Minustecknet valt för att det ska bli snyggt till slut.)

<u>I vårt exempel:</u> (Skriv gradienten som kolonnvektor $\nabla f(x,y) = f'(x,y)^T$.)

$$f'(x,y)^T = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}, \quad g'(x,y)^T = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

Vi har 3 ekvationer för 3 obekanta:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = -\lambda \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

dvs
$$\begin{cases} y = -2x\lambda & (1) \\ x = -2y\lambda & (2) \\ x^2 + y^2 = 1 & (3) \end{cases}$$
$x \neq 0$, $y \neq 0$, $\lambda \neq 0$ inses direkt från (1), (2), (3).

Eliminera λ ur (1), (2): $-2\lambda = \frac{y}{x} = \frac{x}{y}$

vilket ger $y^2 = x^2$. Insättes i (3):

$2x^2 = 1$, $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Sedan $y = \pm x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Fyra extrempunkter: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Insättning i

$f(x,y)$ ger sedan att $\max f(x,y) = \frac{1}{2}$

och $\min f(x,y) = \frac{-1}{2}$.

Obs att λ blir: $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\lambda = -\frac{1}{2}$ $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$ i de respektive punkterna.

Sats (Lagranges multiplikatormetod med ett bivillkor.)

Låt $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ vara deriverbara.
Antag att x_0 är en extrempunkt till f under bivillkoret $g(x) = 0$.

Antag också att $g'(x_0) \neq 0$.
Då finns ett tal λ_0 sådant att (x_0, λ_0) är kritisk punkt till Lagrangefunktionen

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x).$$

Bevis Kritisk punkt till L ges av

$$L'(x,\lambda)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_m} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1'(x) + \lambda g_1'(x) \\ \vdots \\ f_m'(x) + \lambda g_m'(x) \\ g(x) \end{bmatrix} = 0$$

dvs $\begin{cases} f'(x)^T = -\lambda g'(x)^T & \text{(m ekvationer)} \\ g(x) = 0 & \text{(1 ekvation)} \end{cases}$

Dessa ekvationer är tangeringsvillkoret och bivillkoret. Om x_0 är extrempunkt så finns λ_0 så dessa är uppfyllda. Alltså: (x_0, λ_0) är krit. pkt. □

Obs att vi har $m+1$ ekv för
$m+1$ obekanta $x \in \mathbb{R}^m$ och $\lambda \in \mathbb{R}$!

Att optimera L är ett fritt opt. problem,
dvs $(x,\lambda) \in \mathcal{D}_L = \mathbb{R}^{m+1}$ utan
restriktioner och samband.

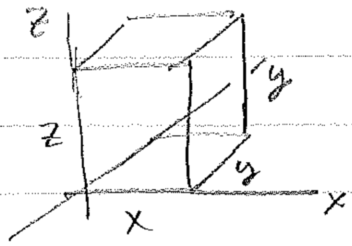
Alltså: vi har ett fritt problem
men vi har fler variabler.

Med n bivillkor har vi
$g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$, och Lagrange-
funktionen

$$L(x,\lambda) = f(x) + \lambda^T g(x).$$

λ kallas Lagrange-multiplikator.

<u>Exempel</u> En låda utan lock ska tillverkas så att volymen blir V och materialåtgången blir minimal. Bestäm lådans dimensioner.



<u>Lösning</u>. Låt sidorna vara x, y, z. Volymen är $xyz = V$ och materialåtgången är väggarnas area:

$$A = \underbrace{xy}_{\text{botten}} + \underbrace{2xz}_{\text{2 sidor}} + \underbrace{2yz}_{\text{2 sidor}}.$$

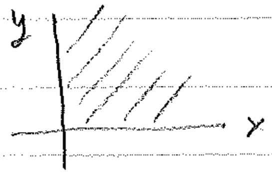
Alltså: extrempkt är ej på randen till området $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

Vi vill minimera $A(x,y,z)$ under bivillkoret $xyz = V$ och $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$.

Obs: $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ annars volymen $= 0 \neq V$.

Detta går att lösa med <u>eliminationsmetod</u>: lös ut $z = \frac{V}{xy}$ och sätt in i A:

$$h(x,y) = A = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}$$



ska minimeras över $x \geq 0, y \geq 0$.

Singulär pkt: ($x=0$ eller $y=0$ (randen))

Kritisk punkt: $h'(x,y)^T = \begin{bmatrix} y - \frac{2V}{x^2} \\ x - \frac{2V}{y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \left((2V)^{\frac{1}{3}}, (2V)^{\frac{1}{3}}, \tfrac{1}{2}(2V)^{\frac{1}{3}} \right)$$

På randen: $h = \infty$ (singulära punkter)

$h = \infty$ på randen $\Rightarrow$ min i krit punkten.
Men denna metod ska vi inte använda. Istället:

Multiplikator metoden

$$f(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz, \quad D_f = \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

$$g(x,y,z) = xyz - V$$

$$L(x,y,z,\lambda) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - V)$$

Obs: $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ är extra bivillkor.
Obs: $x = 0$, $y = 0$, eller $z = 0$ omöjliga för då blir $xyz = 0 \neq V$.
Alltså: min är inte på randen.
Det finns inte heller någon singulär punkt. Då måste extrempunkten vara kritisk punkt i det inre av D_f.

$$L'(x,y,z,\lambda) = \begin{bmatrix} y + 2z + \lambda yz \\ x + 2z + \lambda xz \\ 2x + 2y + \lambda xy \\ xyz - V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eliminera $z = \frac{V}{xy}$, $-\lambda = \underbrace{\frac{y+2z}{yz} = \frac{x+2z}{xz}}_{\Rightarrow\, y = x} = \frac{2(x+y)}{xy}$

Sedan följer lätt: $x = y = (2V)^{1/3}$, $z = \frac{1}{2}(2V)^{1/3}$

$$\lambda = -\frac{4}{(2V)^{1/3}}$$

Hessematrisen:

$$L''(x,y,z,\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1+\lambda z & 2+\lambda y & yz \\ 1+\lambda z & 0 & 2+\lambda x & xz \\ 2+\lambda y & 2+\lambda x & 0 & xy \\ yz & xz & xy & 0 \end{bmatrix}$$

Sifferexempel: tag $V = \frac{1}{2}$ så att

$(2V)^{1/3} = 1$ och $x = y = 1,\ z = \frac{1}{2},\ \lambda = -4.$

$$L''(1,1,\tfrac{1}{2},-4) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Men vi ska inte räkna för hand!

Kör detta i Matlab!

Example in lecture 3.3

```
f(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz
g(x,y,z) = xyz - V
L(x,y,z,lambda)=f(x,y,z)+lambda g(x,y,z)
```

```
V = 1/2;

f = @(x) ( x(1)*x(2) + 2*x(1)*x(3) + 2*x(2)*x(3) );
g = @(x) ( x(1)*x(2)*x(3) - V );
L = @(x) ( f(x(1:3)) + x(4)*g(x(1:3)) );

DL = @(x) ( jacobi(L,x)' )    % gradienten

x0 = [1;1;1;1]                % startgissning for newton
DL(x0)                        % test av gradienten
```

```
DL =

    @(x)(jacobi(L,x)')


x0 =

     1
     1
     1
     1


ans =

    4.0000
    4.0000
    5.0000
    0.5000
```

```
x = newton(DL,x0,1e-6)    % kritisk punkt
```

```
x =

    1.0000
    1.0000
    0.5000
   -4.0000
```

```
D2L = @(x) ( jacobi(DL,x) ) ;    % Hessematrisen
H = D2L(x)
lambda = eig(H)
% sadelpunkt i 4 dimensioner, typiskt for lagrange-problem
```

```
y = f(x(1:3))                % det optimala vardet
```

```
H =

         0   -1.0000   -2.0000    0.5000
   -1.0000    0.0000   -2.0000    0.5000
   -2.0000   -2.0000         0    1.0000
    0.5000    0.5000    1.0000         0


lambda =

   -3.7481
    0.3312
    1.0000
    2.4170


y =

    3.0000
```

Published with MATLAB® R2014b