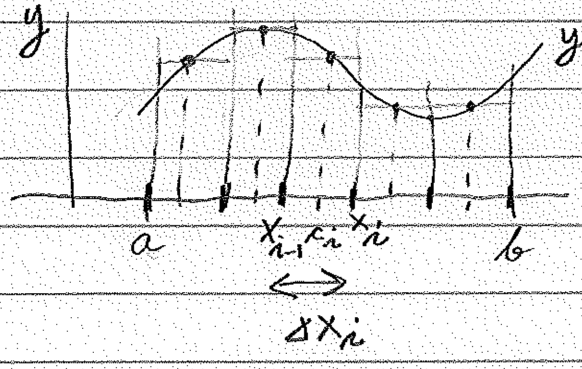
FÖ 5.2

Idag: Dubbelintegralen 14.1, 14.2, 14.3

Kom ihåg enkelintegralen:



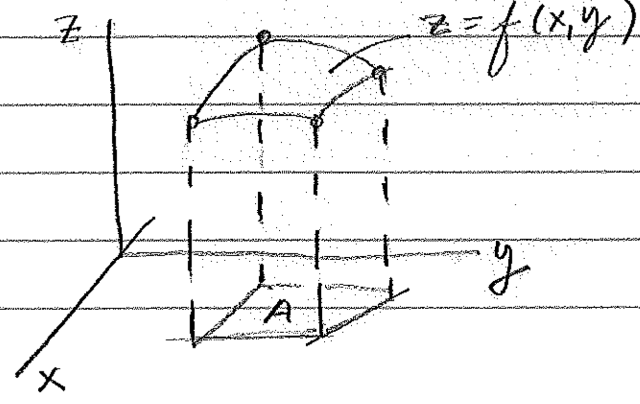
Nät (partition) x_i

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{m} f(c_i)\,\Delta x_i \quad \text{(Riemann-summa)}$$

= arean under grafen om $f(x) \geq 0$.

Vi ska nu definiera dubbelintegralen:

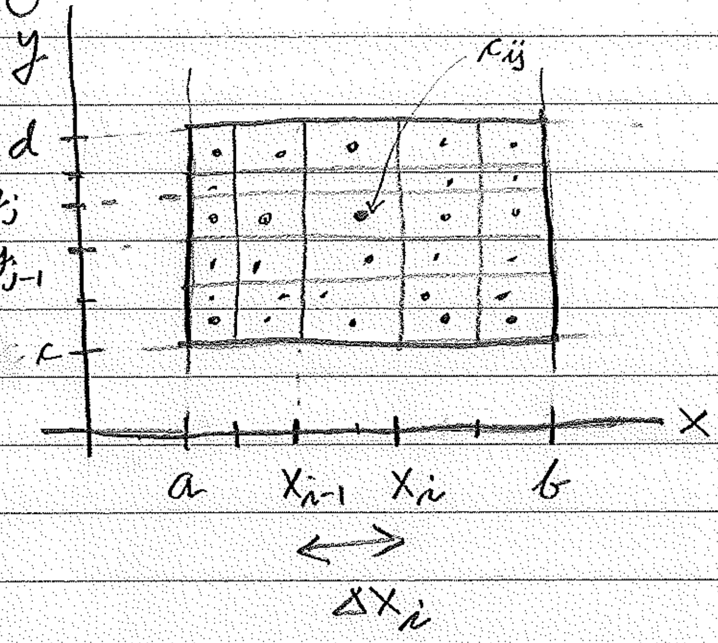
$\iint_A f\,dA = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ = volymen under grafen om $f(x,y) \geq 0$.



Först med en rektangel $A = R = [a,b] \times [c,d]$

Nät (partition) P:
x_i, y_j,

Urvalspunkter $c_{ij} \in R_{ij}$.
Rektanglar $R_{ij} = [x_i, x_j] \times [y_{j-1}, y_j]$
$\|P\| = \max \operatorname{diam}(R_{ij})$



Riemann-summa:

$$R_s(f, P) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \underbrace{f(c_{ij})}_{\text{höjd}} \underbrace{\Delta x_i \, \Delta y_j}_{\text{area} = \Delta A_{ij}}$$

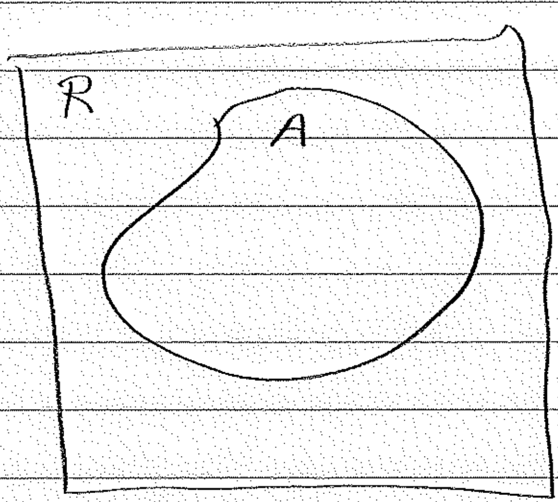
Definition: Funktionen f är integrerbar över rektangeln R med dubbelintegralen

$$I = \iint_R f(x,y)\, dx\, dy = \iint_R f \, dA$$

om gränsvärdet $\lim_{\|P\| \to 0} R_s(f, P) = I$

existerar för alla val av c_{ij}.

Begränsat område A.



Tag stor rektangel R, så att

$A \subset R$ och integrera

$$f_A(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & i\ A \\ 0 & \text{utanför } A \end{cases}$$

$$\iint_A f\, dA = \iint_R f_A\, dA$$

Man kan visa att om f

är kontinuerlig och begränsad

på begränsat område A

så existerar $\iint_A f\, dA$.

Egenskaper

a) $\text{area}(A) = \iint_A 1 \, dA$

b) $\iint_A f \, dA$ = volymen under grafen $z = f(x,y)$ om $f(x,y) \geq 0$.

c) Linjärkombination bevaras:

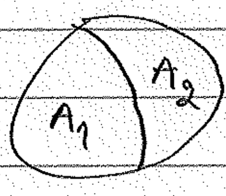
$$\iint_A \left(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\right) dx\,dy =$$

$$= \alpha \iint_A f(x,y)\, dx\,dy + \beta \iint_A g(x,y)\, dx\,dy$$

d) Olikhet bevaras:

$$g(x,y) \leq f(x,y) \Rightarrow \iint_A g \, dA \leq \iint_A f \, dA$$

e) $A = A_1 \cup A_2$ utan överlapp

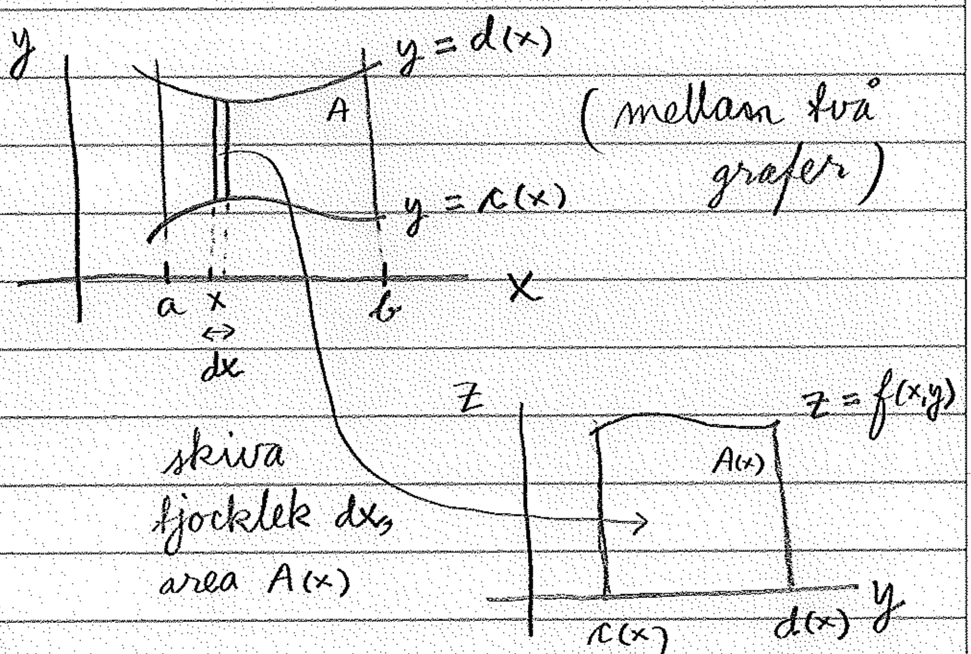


$$\iint_{A_1 \cup A_2} f \, dA = \iint_{A_1} f \, dA + \iint_{A_2} f \, dA$$

Beräkning av integralen med upprepad integration.

Fungerar om A är enkelt i x eller y.

Enkelt i y:

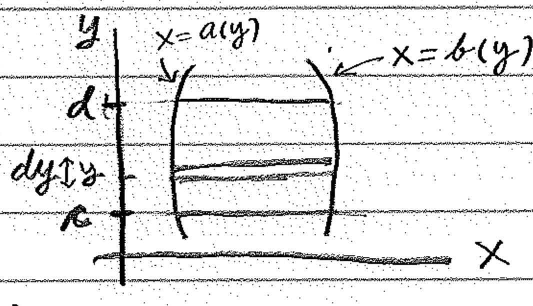


(mellan två grafer)

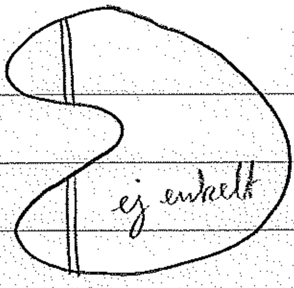
$$\iint_A f\,dA = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

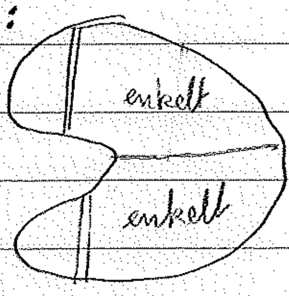
$$= \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

Enkelt i x:

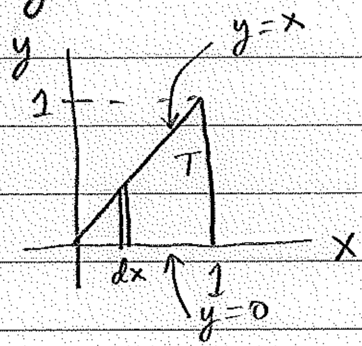


$$\iint_A f\,dA = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Ej enkelt: 

Dela upp: 

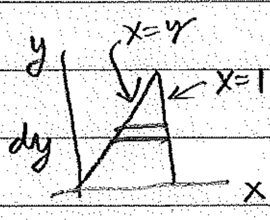
Exempel   Beräkna $\iint_T xy\, dx\, dy$



Triangeln T är både enkel i x och y.

a) $\iint_T xy\, dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^x xy\, dy \right) dx = \int_0^1 x \left(\int_0^x y\, dy \right) dx$

$= \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{x} dx = \int_0^1 \frac{x^3}{2}\, dx = \frac{1}{8}$



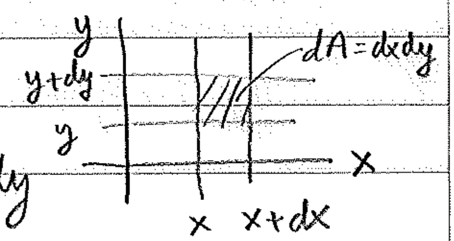
b) $\iint_T xy\, dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_y^1 xy\, dx \right) dy =$

$= \int_0^1 y \left(\int_y^1 x\, dx \right) dy = \ldots = \frac{1}{8}$

Matlab: nästa sida

Area-element: $dA = dx\, dy$

Integralen: $\iint_A f\, dA = \iint_A f(x,y)\, dx\, dy$



Example Lecture 4.3

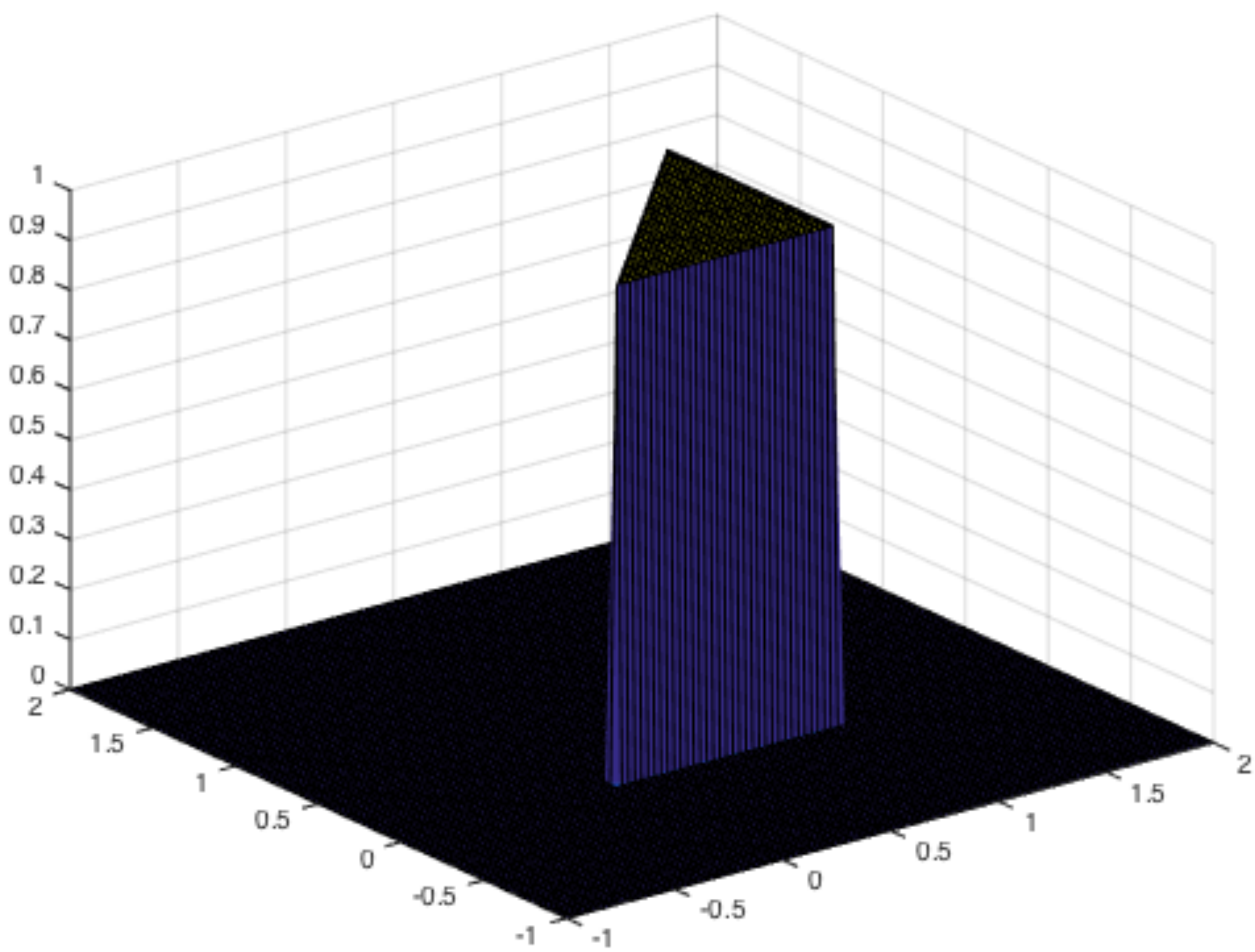
Integral of xy over triangle

Contents

Cut-off function

The function T is a boolean function, which is =1 (true) on the triangle and =0 (false) outside the triangle.

```
T=@(x,y) (0<=x).*(x<=1).*(0<=y).*(y<=x);

x=linspace(-1,2); [X,Y]=meshgrid(x,x); Z=T(X,Y);
surfc(X,Y,Z)
```



Computation of the integral

```
f=@(x,y)  (x.*y);           % the integrand
fT=@(x,y) (f(x,y).*T(x,y)); % the cut-off integrand
I=integral2(fT,0,1,0,1)     % integration over rectangle
```

```
Warning: Reached the maximum number of
```

```
function evaluations (10000). The result
fails the global error test.

I =

    0.1250
```

Computation of the integral

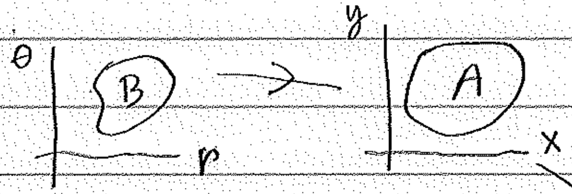
The function T is unnecessarily complicated.
This is enough:

```
T=@(x,y)  (y<=x);
f=@(x,y)  (x.*y);            % the integrand
fT=@(x,y) (f(x,y).*T(x,y)); % the cut-off integrand
I=integral2(fT,0,1,0,1)     % integration over rectangle
```

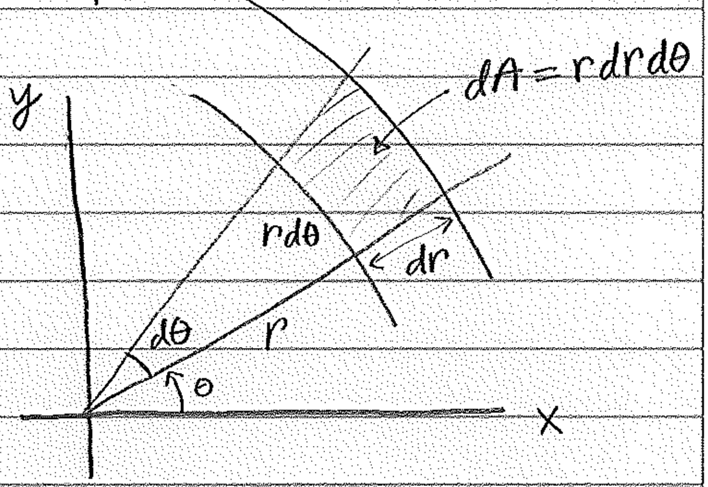
```
Warning: Reached the maximum number of
function evaluations (10000). The result
fails the global error test.

I =

    0.1250
```

Published with MATLAB® R2014b

Polära koordinater (r,θ).



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$



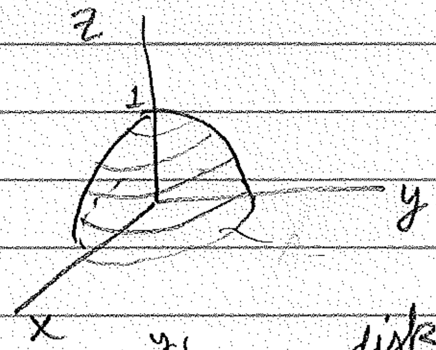
$$dA = r\,dr\,d\theta$$

$$\iint_A f\,dA = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_B f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

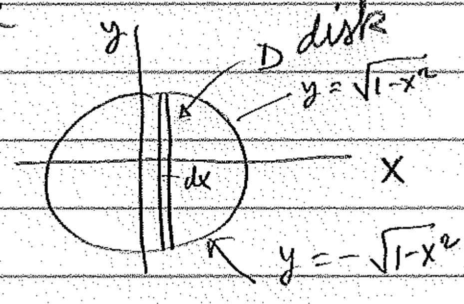
Exempel Volymen under grafen

$$z = 1 - x^2 - y^2.$$



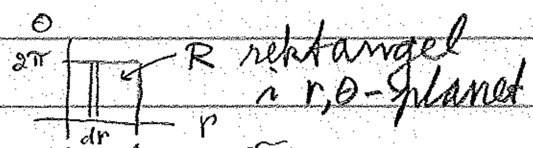
$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\,dy \right) dx$$



Mycket svår!

Polära koordinater:



$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\,dx\,dy = \iint_R (1 - r^2)\,r\,dr\,d\theta = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (1 - r^2)\,r\,d\theta \right) dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - r^2)\,r\,dr = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

14.3 • <u>Generaliserad dubbelintegral.</u>
(improper)

• <u>Medelvärdessatsen</u>

Integralen $\iint_D f(x,y)\,dA$ är definierad om f är <u>kontinuerlig</u> och <u>begränsad</u> och D är ett <u>begränsat område</u>.

Dvs om både f och D "håller sig borta från oändligheten".

Om någon av dem är obegränsad så säger vi att $\iint_D f(x,y)\,dA$ är <u>generaliserad</u> (improper).

En sådan kan vara <u>konvergent</u> eller <u>divergent</u>.

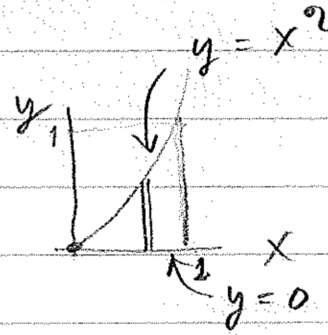
Positiv integrand $f(x,y) \geq 0$.

Om integranden $f(x,y) \geq 0$ så är integralen antingen **konvergent**: $\iint_D f(x,y)\,dA = I$ eller **divergent mot ∞**:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \infty .$$

- Då kan man avgöra konvergens/divergens genom upprepad integration.
- Om $f(x,y)$ har både pos. och negativa värden så funkar inte detta: $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ och $\iint_D f(x,y)\,dy\,dx$ kan ge olika resultat.

Exempel 3 $\quad D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}$

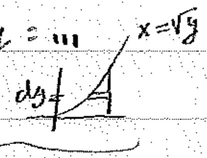


$$f(x,y) = \frac{1}{(x+y)^2} \geq 0$$

$$f(x,y) \to \infty \text{ då } (x,y) \to (0,0)$$

$$\iint_D \frac{1}{(x+y)^2}\, dA = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \frac{1}{(x+y)^2}\, dy \right) dx =$$

$$\boxed{\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{1}{(x+y)^2}\, dx\, dy = \int_0^1 \left[\frac{-1}{x+y} \right]_{\sqrt{y}}^1 dy = \ldots}$$



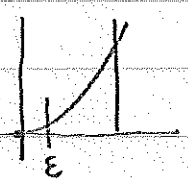
$$= \int_0^1 \left[\frac{-1}{x+y} \right]_{y=0}^{y=x^2} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+x^2} \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{1+x} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx = \Big[\ln(1+x) \Big]_{x=0}^{1} = \ln 2.$$

Konvergent. Egentligen borde vi räkna så här:

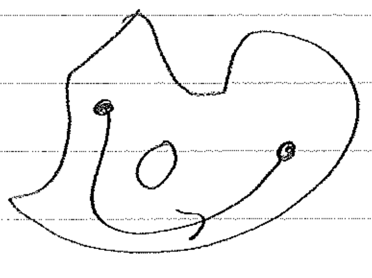
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \int_0^{x^2} \frac{1}{(x+y)^2}\, dy\, dx$$

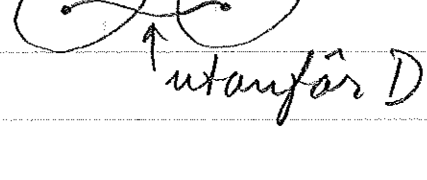


Medelvärden

D är sammanhängande (connected) om två godtyckliga punkter i D alltid kan förbindas med en kurva i D.

$D = D_1 \cup D_2$





(Medelvärdessats för integral) 11

Sats 3 Antag: * D slutet, begränsat och sammanhängande område

* f kont. i D

Då finns punkt $(x_0, y_0) \in D$ sådan att

$$\iint_D f(x,y)\,dA = f(x_0, y_0) \cdot \text{area}(D)$$

Utan bevis.

Dividera med arean:

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{\text{area}(D)} \iint_D f(x,y)\,dA =$$

= medelvärdet av f

över D.

Dvs f kan inte hoppa över sitt medelvärde.