

Integralsatser 16.3 16.4 16.5

- Gauss divergenssats
- Stokes sats

16.4 Sats 8 (Gauss divergenssats)

Antag att D är ett begränsat område i rummet $\mathbb{R}^3$ vars rand

är en styckvis glatt orienterad yta S med utåtriktad enhetsnormalvektorfält $\hat{N}$.

Om F är ett glatt vektorfält i D , så gäller

$$\iiint_D \nabla \cdot F \, dV = \iint_S F \cdot \hat{N} \, dS.$$

Satsen relaterar divergensen $\nabla \cdot F$ till flödet $\iint_S F \cdot \hat{N} \, dS$. $\nabla \cdot F$ är en källtätthet för flödet.



Detta är en 3-D version
av fundamentalsatsen:

$$\int_a^b Df \, dx = [f]_a^b.$$

Förklaringar

Glatt (smooth):

- för $\mathbb{F}$: $\nabla \cdot \mathbb{F}$ ska vara kontinuerlig så att $\int_D \nabla \cdot \mathbb{F} \, dV$ existerar.
- för $\mathbb{F}$: tangenterna $\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial v}$ ska vara kontinuerliga så att

$$\hat{N} = \pm \left(\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial v} \right) / \left| \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial v} \right| \text{ existerar.}$$

13

En orienterbar yta S är en yta som har ett entydigt enhetsnormalvektorfält $\hat{N}$.

Fältet $\hat{N}$ definierar en orientering av S , dvs en positiv och en negativ sida (upp/med, in/ut)

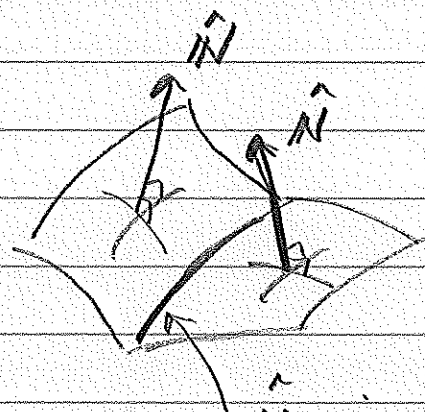


(Möbius band är ej orienterbar.)

En orienterad yta är en yta tillsammans med ett val av orientering.

Detta behövs för att $\oint_S \mathbf{F} \cdot \hat{N} dS$ ska existera.

En styckevis glatt orienterad yta är hopskarvad av glatta ytor så att orienteringarna passar ihop.



$\hat{n}$ är definierad på skarven

I boken står det

$$\iiint_D \operatorname{div} F \, dV = \iint_S F \cdot \hat{n} \, dS$$

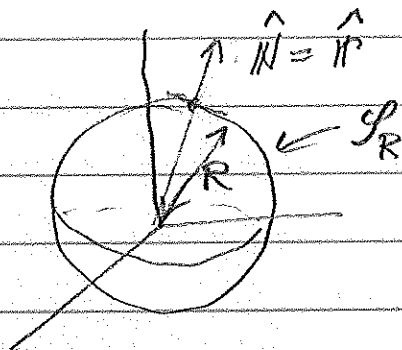
- $\iint_S$ betyder integral över sluten yta. Onödigt beteckning.
- $\operatorname{div} F = \nabla \cdot F$

Exempel $\mathbf{F} = \frac{\pi}{|\mathbf{r}|^3} = \frac{\pi}{s^3}, \quad s \neq 0$

7.1 : $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \quad \text{om } s \neq 0$

$\mathcal{S}_R : s = R \quad \text{sfär}$

Utlödet: $\iint_{\mathcal{S}_R} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS =$



$= \iint_{\mathcal{S}_R} \frac{1}{R^2} R^2 d\phi d\theta = 4\pi$ oberoende av R , för $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = \frac{\pi}{R^3} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{R^2}$

och $dS = R^2 d\phi d\theta$ på $\mathcal{S}_R$.

Gauss sats ej användbar här

för $\nabla \cdot \mathbf{F}$ existerar ej i origo.
Punktkälla i origo.

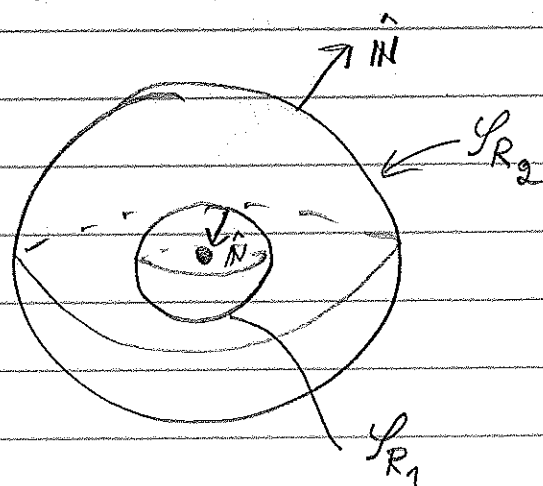
Men

$0 = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dV =$

$= \iint_{\mathcal{S}_{R_1}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS + \iint_{\mathcal{S}_{R_2}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS$

$\underbrace{\hat{\mathbf{N}}}_{=-\hat{\mathbf{r}}}$ $\underbrace{\hat{\mathbf{N}}}_{=\hat{\mathbf{r}}}$

$= -4\pi + 4\pi = 0$



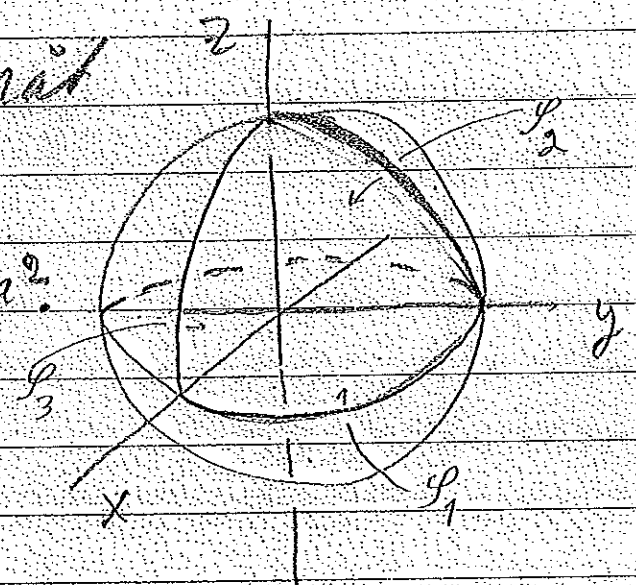
Adams exercise

16.4:12

$$F = (y + xz)i + (y + yz)j - (2x + z^2)k$$

$$\nabla \cdot F = z + 1 + z - 2z = 1$$

Beräkna flödet uppåt genom första oktanten $\mathcal{P}$ av sfären $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.



Alltså: $\iint_{\mathcal{P}} F \cdot \hat{N} dS$

På $\mathcal{P}$: $S^2 = x^2 + y^2 + z^2 = a^2$
 $\hat{N} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$, $dS = a^2 \sin \phi d\phi d\theta$

$\iint F \cdot \hat{N} dS$ för krångligt.

Använd divergenssatsen.

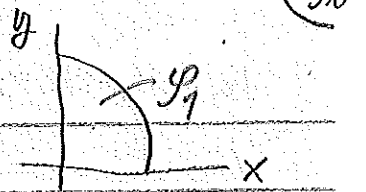
Obs: $\mathcal{P}$ är en öppen yta. Måste slutas genom att lägga till $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$.

Divergenssatsen: $D =$ första oktanten av klotet.

$$\iiint_D \nabla \cdot F dV = \iint_{\mathcal{P}} F \cdot \hat{N} dS + \iint_{\mathcal{P}_1} F \cdot \hat{N} dS + \iint_{\mathcal{P}_2} F \cdot \hat{N} dS + \iint_{\mathcal{P}_3} F \cdot \hat{N} dS$$

Här är $\iiint_D \nabla \cdot F dV = \iiint_D dV = V = \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi a^3}{3} = \frac{\pi a^3}{6}$

På $\mathcal{P}_1$: $z=0$, $\hat{N} = -\hat{k}$



$$\mathbf{F} \cdot \hat{N} = \sqrt{1+2x} = -F_3(x, y, 0) = -1$$

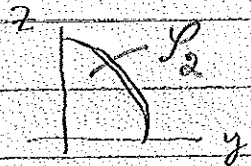
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad ds = r dr d\theta$$

$$\iint_{\mathcal{P}_1} \mathbf{F} \cdot \hat{N} ds = \iint_{\mathcal{P}_1} 2x ds = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^a r \cos \theta r dr d\theta = 2 \frac{a^3}{3} = \frac{2a^3}{3}$$

På $\mathcal{P}_2$: $x=0$, $\hat{N} = -\hat{i}$

$$\mathbf{F} \cdot \hat{N} = -y = -F_1(0, y, z)$$

$$\begin{cases} y = r \cos \theta \\ z = r \sin \theta \end{cases}$$



$$\iint_{\mathcal{P}_2} \mathbf{F} \cdot \hat{N} ds = -\iint_{\mathcal{P}_2} y ds = \text{samma räkning} = -\frac{a^3}{3}$$

På $\mathcal{P}_3$: $y=0$, $\hat{N} = -\hat{j}$

$$\mathbf{F} \cdot \hat{N} = 0 = -F_2(x, 0, z)$$

$$\iint_{\mathcal{P}_3} \mathbf{F} \cdot \hat{N} ds = 0$$

Alltså:

$$\iint_{\mathcal{P}} \mathbf{F} \cdot \hat{N} ds = \pi \frac{a^3}{6} - \frac{2a^3}{3} + \frac{a^3}{3} = (\pi - 2) \frac{a^3}{6}$$

Sats 9 (Varianter av Gauss sats) ⁽⁶⁾

$$\iiint_D \vec{\nabla} \times \mathbf{F} dV = \iint_{\mathcal{Y}} \hat{\mathbf{N}} \times \mathbf{F} dS = - \iint_{\mathcal{Y}} \mathbf{F} \times \hat{\mathbf{N}} dS$$

$$\iiint_D \vec{\nabla} \phi dV = \iint_{\mathcal{Y}} \phi \hat{\mathbf{N}} dS$$

obs: $\vec{\nabla}$ i D blir $\hat{\mathbf{N}}$ på $\mathcal{Y}$

Viktiga användningar av
Gauss sats:

- härledning av värmelednings-
ekvationen (och andra PDE):

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{F} = f$$

- bevis av partiell integration
(grunden för FEM):

$$\iiint_D (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{F}) \phi dV = \iint_{\mathcal{Y}} (\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F}) \phi dS - \iiint_D \mathbf{F} \cdot \vec{\nabla} \phi dV$$

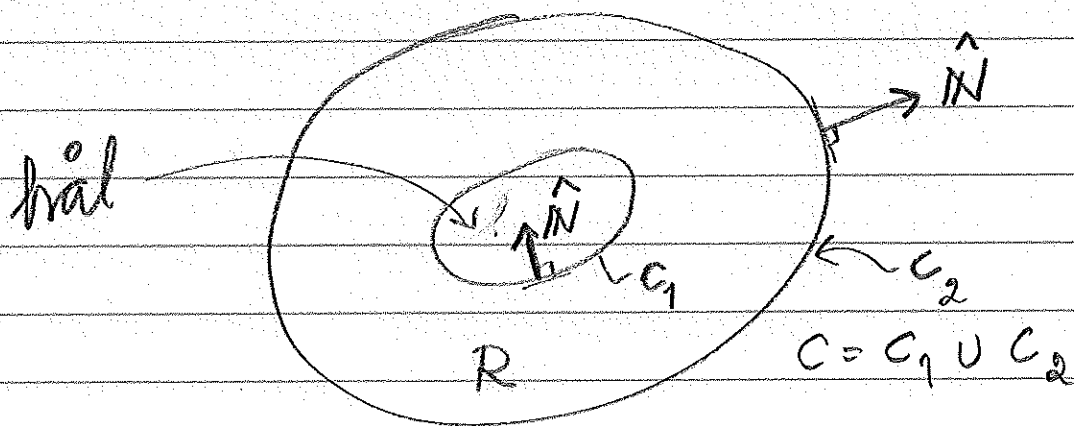
16.3 Adams bevisar Gauss
sats genom att först bevisa
Greens sats i planet (Sats 6).

Vi hoppar över det.

Men vi skriver med Gauss sats i planet.

Sats 7 (Gauss sats i planet)

$$\iint_R \nabla \cdot \mathbf{F} dA = \int_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} ds$$

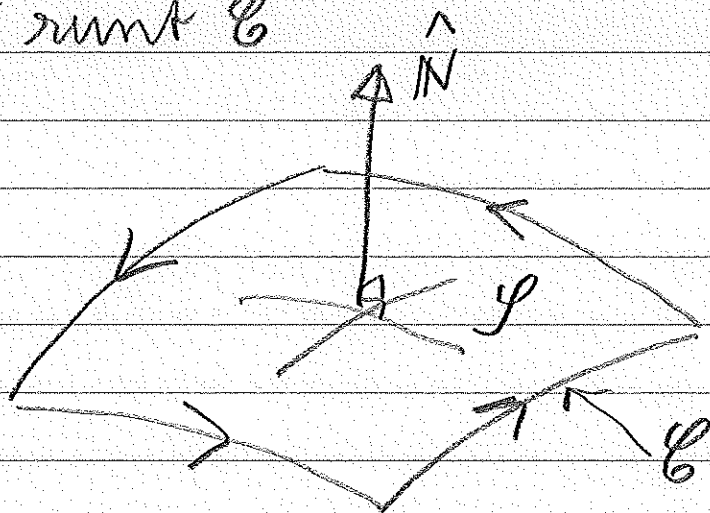


I boken: $\oint_C \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} ds$ sluten kurva.
Onödigt beteckning.

16.5

Sats 10 (Stokes sats)

$$\underbrace{\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}_{\text{= cirkulation av } \mathbf{F} \text{ runt } C} = \iint_S \underbrace{(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}}_{\text{= rotationsfäthet}} dS$$



Randkurvan C är positivt orienterad med avseende på orienteringen av S (tumregeln).

Detta är en annan variant av fundamentalsatsen.

Stokes sats är viktig i

• strömningslära

$\vec{F}$ = hastighetsfält
 $\nabla \times \vec{F}$ = vorticitet

• ellära

$\vec{F}$ är elektriskt fält
eller magnetfält

