Matematik Chalmers

Tentamen MVE255 (TMV191) Matematisk analys i flera variabler, 2015–08–28 f V

Telefon: Frida Svelander 0703–088304
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Uppgift 1, totalt 20 poäng, bedöms huvudsakligen på svaret.

Uppgift 2–6 är värda 6 poäng vardera, totalt 30. De bedöms även på hur väl formulerade lösningarna är. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng! Renskriv lösningarna, lämna inte in kladdpapper.

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost. Granskning: torsdag 17 september, 11.30–12.30, hos Stig Larsson.

---

1. Varje deluppgift är värd 2 poäng, totalt 20.

1.1. Ge ett exempel som visar hur man använder MATLAB-funktionen `jacobi.m`.

1.2. Visa hur man plottar grafen till funktionen $f(x, y) = xy$ i Matlab.

1.3. Hur löser man ekvationssystemet $y(1 - x^2) = 0; xy = 2$ med programmet `newton.m`?

1.4. Fyll i värden i filen `BdryData.m`:

```
if tag==1  k=...;  uA=...;   g=...; end
if tag==2  k=...;  uA=...;   g=...; end
```

som anger randvillkoren $-a(0)u'(0) + 3(u(0) - 4) = 5$, $u'(1) = 0$.

1.5. PDE Toolbox har dessa beteckningar för randvärdesproblem av typen "Generic scalar problem":

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (c\nabla u) + au = f & \text{i } D, \\ n \cdot (c\nabla u) + qu = g & \text{på } S_2 \text{ (Neumann)}, \\ hu = r & \text{på } S_1 \text{ (Dirichlet)}. \end{cases}$$

Vad ska man fylla i för värden för ett värmeledningsproblem med inga värmekällor, värmeledningskoefficient = 1, temperaturen = 10 på en del av randen och resten av randen perfekt isolerad?

1.6. Visa att $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$.

1.7. Beräkna den linjära approximationen till funktionen $f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 - x_1x_2 \\ x_1x_2^2 \end{bmatrix}$ kring punkten $a = (1, 1)$.

1.8. Beräkna integralen $\iiint_T z\,\mathrm{d}V$ där T är tetraedern som begränsas av planen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ och $x + y + z = 1$.

1.9. Beräkna $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, där $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ och C är kurvan $y = x^3$, $x \in [0, 1]$.

1.10. Skriv ned en ekvation för tangentplanet till ytan $z = x^2 + y^2$ i punkten $(1, 1, 2)$.

Vänd!

2. Randvärdesproblemet för en stång som är fast inspänd i ena änden och utsatt för en dragkraft i den andra är:

$$\begin{cases} -\,\mathrm{D}\big(EA\,\mathrm{D}u\big) = 0 \quad \text{för } x \in I = (0, L), \\ u(0) = 0, \quad EA(L)\,u'(L) = P. \end{cases}$$

Antag att tvärsnittsarean varierar enligt $A(x) = \dfrac{A_0}{1 + \gamma\, x/L}$. Här är P, E, L, A_0 givna och γ en parameter. Bestäm γ så att förlängningen av stången $u(L)$ får ett föreskrivet värde ΔL, dvs $u(L) = \Delta L$.

3. (a) Ställ upp Lagranges multiplikatormetod för att bestämma max och min för funktionen $f(x, y, z) = xyz$ på sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 12$. Du behöver bara skriva ned ekvationerna men inte lösa dem. (3p)

(b) Beskriv hur man gör detta i Matlab med våra program `jacobi.m` och `newton.m`. (3 p)

4. FEM i 1-D. Härled finita elementmetoden utgående från följande svaga formulering av begynnelsevärdesproblemet: Finn u så att

$$\int_0^L a\,\mathrm{D}u\,\mathrm{D}v\,\mathrm{d}x = \int_0^L f v\,\mathrm{d}x \quad \text{för alla } v.$$

5. Densiteten för materialet i ett klot med radien R varierar enligt formeln $\delta(\mathbf{r}) = \dfrac{\delta_0}{1 + |\mathbf{r}|/R}$. Beräkna klotets massa.

6. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -c\,\dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$ ut genom ellipsoiden $3x^2 + 7y^2 + 13z^2 = 6$. Tips: använd divergenssatsen på området mellan ellipsoiden och en lämpligt vald sfär.

`/stig`

MVE 255 2015-08-28

1.1 Df = jacobi(@(x) x(1)*x(2), [1;1])

deriverar funktionen $f(x,y)=xy$ i pkt $(1,1)$.

1.2
```
>> x = linspace(-5,5); y = x;
>> [X,Y] = meshgrid(x,y)
>> Z = X.*Y;
>> surf(X,Y,Z)
```

1.3
```
x = newton(@(X) [X(2)*(1-X(1)^2); X(1)*X(2)-2],
    [1;1], 1e-6)
```

1.4
```
if flag==1 k=3; uA=4; g=5;
if flag==2 k=0; uA=7; g=0;
```
← används ej, godtyckligt värde.

1.5 $c=1,\ a=0,\ f=0$

Dirichlet: $h=1,\ r=10$ på S_1

Neumann: $q=0,\ g=0$ på S_2.

1.6 $$\nabla(\phi\psi) = \frac{\partial}{\partial x}(\phi\psi)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\phi\psi)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\phi\psi)\mathbf{k} =$$

$$= (\phi'_x\psi + \phi\psi'_x)\mathbf{i} + (\phi'_y\psi + \phi\psi'_y)\mathbf{j} + (\phi'_z\psi + \phi\psi'_z)\mathbf{k} =$$

$$= \phi(\psi'_x\mathbf{i} + \psi'_y\mathbf{j} + \psi'_z\mathbf{k}) + \psi(\phi'_x\mathbf{i} + \phi'_y\mathbf{j} + \phi'_z\mathbf{k})$$

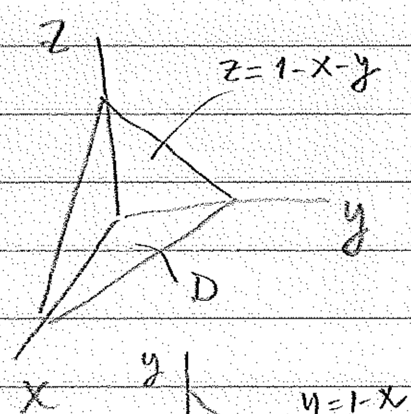
$$= \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi.$$

1.7 $f(x) = \begin{bmatrix} x_1 - x_1 x_2 \\ x_1 x_2^2 \end{bmatrix}$, $f(1,1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 1 - x_2 & -x_1 \\ x_2^2 & 2x_1 x_2 \end{bmatrix}, \quad f'(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

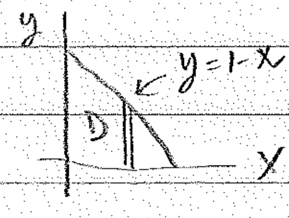
$$L_f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \end{bmatrix}$$

1.8 $\iiint_T z\,dV = \iint_D \left(\int_0^{1-x-y} z\,dz \right) dx\,dy =$



$$= \iint_D \frac{1}{2}(1-x-y)^2\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y)^2\,dy \right) dx =$$



$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[-\frac{1}{3}(1-x-y)^3 \right]_{y=0}^{1-x} dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^3\,dx = \frac{1}{6}\left[-\frac{1}{4}(1-x)^4 \right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

1.9 $y = x^3$, $x \in [0,1]$. Parametrisering:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^3 \end{cases}, \quad t \in [0,1]. \qquad \mathbf{r}'(t) = 1\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt = \int_0^1 [t^6, t^2] \cdot [1, 3t^2]\,dt$$

$$= \int_0^1 (t^6 + 3t^4)\,dt = \frac{1}{7} + \frac{3}{5} = \frac{26}{35}$$

1.10 $z = x^2 + y^2$ i $(1,1,2)$.

Linjärisera kring $(1,1)$:

$f(x,y) = x^2 + y^2$

$f(1,1) = 2$

$f'(x,y) = [2x, 2y]$

$f'(1,1) = [2, 2]$

$$z = 2 + [2,2]\begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \end{bmatrix}$$

$$z = 2 + 2(x-1) + 2(y-1)$$

$$2(x-1) + 2(y-1) - (z-2) = 0$$

---

2. $$-D\left(\frac{EA_0}{1+\gamma x/L} Du\right) = 0$$

$$\frac{EA_0}{1+\gamma x/L} Du(x) = C_1$$

Randvillkor i $x = L$: $P = \frac{EA_0}{1+\gamma L/L} Du(L) = C_1$

$$\Rightarrow C_1 = P$$

$$Du(x) = \frac{P}{EA_0}\left(1 + \gamma \frac{x}{L}\right)$$

$$u(x) = \frac{P}{EA_0}\left(x + \gamma \frac{x^2}{2L}\right) + C_2$$

Randvillkor i $x = 0$: $0 = u(0) = C_2$, $C_2 = 0$.

$$u(x) = \frac{P}{EA_0}\left(x + \gamma \frac{x^2}{2L}\right)$$

Vid $x = L$: $\Delta L = u(L) = \frac{P}{EA_0} L\left(1 + \frac{1}{2}\gamma\right)$

Lös ut γ: $1+\frac{1}{2}\gamma = \frac{EA_0\,\Delta L}{PL}$

$$\gamma = 2\left(\frac{EA_0}{P}\frac{\Delta L}{L} - 1\right)$$

3.(a) Sök kritisk punkt till Lagrangefunktionen

$$L(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda(x^2+y^2+z^2-12)$$

Kritiska punkter ges av

$$DL(x,y,z,\lambda) = 0$$

dvs
$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = yz + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = xz + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = xy + 2\lambda z = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2+y^2+z^2-12 = 0 \end{cases}$$

b)
```
f = @(x)(x(1)*x(2)* x(3));
g = @(x)( x(1)^2 + x(2)^2 + x(3)^2 -12);
L = @(x) ( f( x(1:3)) + x(4)*g( x(1:3)) );
DL = @(x) jacobi( L,x)';
x0 = [1;1;1;1];
x = newton( DL, x0, 1e-6)
y = f(x(1:3))
```

4. Se FEM1.

5. $$m=\iiint_K \delta \, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \frac{\delta_0}{1+\rho/R}\,\rho^2 d\rho \sin\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= \delta_0 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\phi \, d\phi \int_0^{R} \frac{\rho^2}{1+\rho/R}\, d\rho$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi, \quad \int_0^{\pi} \sin\phi \, d\phi = \left[-\cos\phi\right]_0^{\pi} = 2$$

$$\int_0^{R} \frac{\rho^2}{1+\rho/R}\, d\rho = \left\{ \begin{array}{l} s = \rho/R \\ ds = d\rho/R \end{array} \right\} = R^3 \int_0^1 \frac{s^2}{1+s}\, ds =$$

$$= R^3 \int_0^1 \left(\frac{-1+s^2}{1+s} + \frac{1}{1+s} \right) ds = R^3 \int_0^1 \left(\frac{(1+s)(-1+s)}{1+s} + \frac{1}{1+s} \right) ds$$

$$= R^3 \int_0^1 \left(-1+s + \frac{1}{1+s} \right) ds = R \left[-s + \frac{s^2}{2} + \ln(1+s) \right]_0^1$$

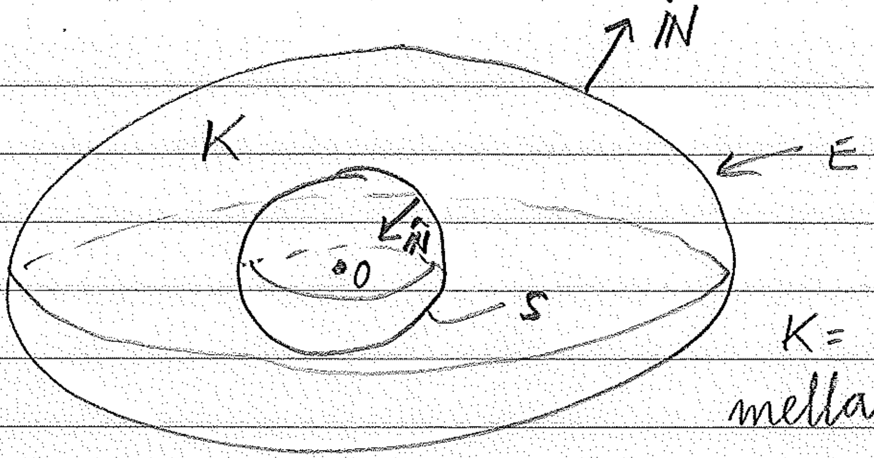
$$= R^3 \left(\frac{-1}{2} + \ln(2) \right)$$

$$m = \delta_0 2\pi \cdot 2 \cdot R^3 \cdot \left(\frac{-1}{2} + \ln(2) \right) = 4\pi \left(\ln(2) - \frac{1}{2} \right) \delta_0 R^3$$

---

6. Tag en liten sfär S med centrum i origo, med radie R som är helt innanför ellipsoiden E. (Man kan även använda en stor sfär som är helt utanför E.)

Välj inåtriktad enhetsnormal på S.



K = området mellan S och E.

Divergenssatsen ger:

$$\iiint_K \nabla \cdot \mathbb{F}\, dV = \iint_E \mathbb{F} \cdot \hat{N}\, dS + \iint_S \mathbb{F} \cdot \hat{N}\, dS$$

$$\iint_E \mathbb{F} \cdot \hat{N}\, dS = -\iint_S \mathbb{F} \cdot \hat{N}\, dS + \iiint_K \nabla \cdot \mathbb{F}\, dV$$

Här är $\nabla \cdot \mathbb{F} = 0$, ty $\mathbb{F} = -c \dfrac{\mathbb{r}}{|\mathbb{r}|^3}$

så att $\dfrac{\partial F_x}{\partial x} = -c \dfrac{\partial}{\partial x} \dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

$$= -c \, \frac{\frac{\partial x}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - x \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$= -c \, \frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2} \cdot 2x \cdot x}{(\quad)^3} = -c\left(\frac{1}{|\mathbb{r}|^3} - \frac{3x^2}{|\mathbb{r}|^5}\right)$$

På samma vis: $\dfrac{\partial F_y}{\partial y} = -c\left(\dfrac{1}{|\mathbb{r}|^3} - \dfrac{3y^2}{|\mathbb{r}|^5}\right)$, $\dfrac{\partial F_z}{\partial z} = -c\left(\dfrac{1}{|\mathbb{r}|^3} - \dfrac{3z^2}{|\mathbb{r}|^5}\right)$

Alltså: $\nabla \cdot \mathbb{F} = \dfrac{\partial F_x}{\partial x} + \dfrac{\partial F_y}{\partial y} + \dfrac{\partial F_z}{\partial z} = -c\left(\dfrac{3}{|\mathbb{r}|^3} - \dfrac{3(x^2+y^2+z^2)}{|\mathbb{r}|^5}\right)$

$= 0.$

Flödet genom S: $\iint_S \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}} \, dS = \left\{ \hat{\mathbb{N}} = -\hat{\mathbb{r}} = \frac{-\mathbb{r}}{|\mathbb{r}|} \right\}$

$$= \iint_S \frac{-c\,\mathbb{r}}{|\mathbb{r}|^3} \cdot (-\hat{\mathbb{r}}) \, dS = +c \iint_S \frac{1}{|\mathbb{r}|^2} \, dS =$$

$$= \left\{ |\mathbb{r}| = R, \; dS = R^2 \sin\phi \, d\phi \, d\theta \right\}$$

$$= c \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{R^2} R^2 \sin\phi \, d\phi \, d\theta = 4\pi c.$$

Alltså: $\iint_E \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}} \, dS = -\iint_S \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}} \, dS = -4\pi c.$

/Stig