Matematik Chalmers

Tentamen MVE255 Matematisk analys i flera variabler, 2016–10–07 f SB

Telefon: Stig Larsson 772 3543
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Uppgift 1, totalt 10 poäng, bedöms huvudsakligen på svaret. Uppgift 2–5 är värda 5 poäng vardera, totalt 20, bedöms på om lösningarna är korrekta. Uppgift 6–7 är värda 10 poäng vardera. De bedöms även på hur väl formulerade lösningarna är. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng! Renskriv lösningarna, lämna inte in kladdpapper.

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost.

---

1. Varje deluppgift är värd 2 poäng, totalt 10.

1.1. Beräkna integralen $\displaystyle\iint_T xy\,\mathrm{d}A$ där T är triangeln med hörn i (0,0), (1,0), (0,1).

1.2. Vad blir variabeln `A` efter kommandona

```
>> f=@(x) [x(1)*x(2); x(3)]; x=[3;2;4]; A=jacobi(f,x);
```

med Matlab-programmet `jacobi.m` från datorövningarna.

1.3. Undersök funktionen $f(x,y)=x^2+y^4$ med avseende på max, min, och sadelpunkter.

1.4. Visa att

$$\nabla\times(\nabla\phi)=\mathbf{0}$$

1.5. PDE Toolbox har dessa beteckningar för randvärdesproblem av typen “Generic scalar problem”:

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(c\nabla u)+au=f & \text{i } D,\\ n\cdot(c\nabla u)+qu=g & \text{på } S_2 \text{ (Neumann)},\\ hu=r & \text{på } S_1 \text{ (Dirichlet)}.\end{cases}$$

Vad ska man fylla i för värden på c, a, f, q, g, h, r för ett värmeledningsproblem med inre värmekälla $= 10$ `J/(m`^{3} `s)`, värmeledningskoefficient $= 9$ `[J/(m K s)]` i området D. En del av randen är perfekt isolerad och resten av randen har ingen isolering alls. Inga värmekällor på randen, yttre temperatur $= 6$ `K`.

2. (5 poäng) Skriv ned formeln för Taylors polynom av grad 2 för en allmän funktion $f(x,y)$ kring punkten $(0,0)$. Använd sedan formeln för att bestämma Taylorpolynomet för $f(x,y)=e^{3y-x}$.

3. (5 poäng) Härled den svaga formuleringen av randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(a\nabla u)=f & \text{i } D,\\ a\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}}u+k(u-u_{\mathrm{A}})=g & \text{på } S.\end{cases}$$

4. (5 poäng) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x,y,z)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ ut ur området $D=\{(x,y,z):x^2+y^2\le z,\ 0\le z\le H\}$ (med höjden H) utan att använda divergenssatsen. (Obs att ytan består av två delar, en buktig del och ett platt ”lock”.)

5. (5 poäng) Beräkna flödet i uppgift 4 med hjälp av divergenssatsen.

Vänd!

6. (10 poäng) (a) Beräkna ett steg av Newtons metod för systemet

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 &= 0 \\ x_2 x_3 - x_3 &= 0 \\ x_3^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

med startpunkt $(1, 1, 1)$. (4 poäng)

(b) Härled Newtons metod med hjälp av linjärisering. (3 poäng)

(c) Skriv ned Newtons metod i MATLAB. Antag att funktionen `jacobi.m` finns. (3 poäng)

7. (10 poäng) Laplace-operatorn i sfärisk symmetri. Låt x, y, z vara cartesiska koordinater och ρ, ϕ, θ vara sfäriska koordinater. Antag att funktionen u är sfäriskt symmetrisk, dvs $u = u(\rho)$ beror endast på ρ men ej på ϕ, θ. Visa att

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{du}{d\rho} = \frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2 \frac{du}{d\rho}\right)$$

`/stig`

MVE255 Matematisk analys i flera variabler, 2016–10–07 f SB. Lösningar.

1.

1.1.

$$\int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} xy \, \mathrm{d}y \Big) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{24}$$

1.2. `A=[2,3,0;0,0,1]`

1.3. Vi undersöker de typer av punkter där maximum kan inträffa.

1. *Singulära punkter:* finns inga.

2. *Kritiska punkter* ges av

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 2x = 0, \\ f'_y(x,y) &= 4y^3 = 0 \end{aligned}$$

Enda lösningen är $(x,y) = (0,0)$. En kritisk punkt: $(0,0)$.

Vi beräknar Hesse-matrisen:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{bmatrix}, \quad H(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Egenvärdena är 2 och 0. Hesse-matrisen ger ingen information. Men vi ser att $f(x,y) > 0$ utom då $(x,y) = (0,0)$. Alltså: globalt minimum i origo.

3. *Randpunkter.* Finns inga.

1.4.

$$\nabla \times (\nabla\phi) = \Big(\frac{\partial}{\partial y}\phi'_z - \frac{\partial}{\partial z}\phi'_y, \frac{\partial}{\partial z}\phi'_x - \frac{\partial}{\partial x}\phi'_z, \frac{\partial}{\partial x}\phi'_y - \frac{\partial}{\partial y}\phi'_x \Big) = \mathbf{0}$$

1.5. I Ω: $c = 9,\ a = 0,\ f = 10$. På S_2: $q = 0,\ g = 0$. På S_1: $h = 1$, $r = 6$.

2.

$$P_2(x,y) = f(0,0) + f'(0,0) \begin{bmatrix} x-0 \\ y-0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x-0, y-0 \end{bmatrix} f''(0,0) \begin{bmatrix} x-0 \\ y-0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &f(x,y) = e^{3y-x}, \\ &P_2(x,y) = 1 + \begin{bmatrix} -1, 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x, y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 - x + 3y + \frac{1}{2}(x^2 - 6xy + 9y^2) \end{aligned}$$

3. Multiplicera med testfunktion v och integrera partiellt:

$$\iiint_D fv\,\mathrm{d}V = -\iiint_D \nabla\cdot(a\nabla u)v\,\mathrm{d}V = \iint_S \hat{\mathbf{N}}\cdot(a\nabla u)v\,\mathrm{d}S + \iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}V$$

Här är

$$\hat{\mathbf{N}}\cdot(a\nabla u) = a\hat{\mathbf{N}}\cdot\nabla u = a\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{N}}}\nabla u = g - k(u-u_A)$$

så att

$$\iiint_D fv\,\mathrm{d}V = \iint_S (g-k(u-u_A))v\,\mathrm{d}S + \iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}V$$

Samla u-termer:

$$\iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}V + \iint_S kuv\,\mathrm{d}S = \iiint_D fv\,\mathrm{d}V = \iint_S (g+ku_A)v\,\mathrm{d}S$$

Svaga formen blir: finn u sådan att

$$\iiint_D a\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}V + \iint_S kuv\,\mathrm{d}S = \iiint_D fv\,\mathrm{d}V = \iint_S (g+ku_A)v\,\mathrm{d}S$$

för alla testfunktioner v.

4. Parametrisering av den buktiga delen S_1 av ytan ($z = x^2+y^2 = r^2$):

$$\begin{cases} x = \sqrt{z}\cos(\theta), \\ y = \sqrt{z}\sin(\theta), \qquad (\theta,z)\in R_1 = \{0\le\theta<2\pi,\ 0\le z\le H\}. \\ z = z, \end{cases}$$

Tangenter:

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} = -\sqrt{z}\sin(\theta)\mathbf{i} + \sqrt{z}\cos(\theta)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$
$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} = \frac{1}{2\sqrt{z}}\cos(\theta)\mathbf{i} + \frac{1}{2\sqrt{z}}\sin(\theta)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

En normalvektor:

$$\mathbf{N} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} = \sqrt{z}\cos(\theta)\mathbf{i} + \sqrt{z}\sin(\theta)\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k}$$

Vi ser att $\mathbf{N}$ pekar utåt och

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}|\mathbf{N}|\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \mathbf{N}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

så att flödet blir

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S = \iint_{R_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \iint_{R_1}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z^2\mathbf{k})\cdot(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}-\frac{1}{2}\mathbf{k})\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$
$$= \iint_{R_1}(x^2+y^2-\frac{1}{2}z^2)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \int_0^H\int_0^{2\pi}(z-\frac{1}{2}z^2)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = 2\pi(\tfrac{H^2}{2}-\tfrac{H^3}{6}) = \pi(H^2-\tfrac{H^3}{3})$$

På toppytan S_2:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta), \\ y = r\sin(\theta), \qquad (r,\theta)\in R_2 = \{0\le r\le\sqrt{H},\ 0\le\theta<2\pi\}, \\ z = H, \end{cases}$$

$$\mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,\ \hat{\mathbf{N}} = \mathbf{k},\ \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}} = (x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z^2\mathbf{k})\cdot\mathbf{k} = z^2 = H^2$$

så att

$$\iint_{S_2}\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S = H^2\iint_{S_2}\mathrm{d}S = H^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{H}} r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \pi H^3$$

Alltså blir totala flödet

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S = \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S + \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S = \pi(H^2 - \tfrac{H^3}{3}) + \pi H^3 = \pi H^2 + \tfrac{2}{3}\pi H^3$$

5.

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = 1 + 1 + 2z = 2(1+z)$$

Divergenssatsen:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S = \iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,\mathrm{d}V = \iiint_D 2(1+z)\,\mathrm{d}V = \int_0^H\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{z}} 2(1+z)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^H 2(1+z)\int_0^{\sqrt{z}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z = 2\pi\int_0^H 2(1+z)\frac{z}{2}\,\mathrm{d}z = 2\pi\int_0^H (z+z^2)\,\mathrm{d}z$$
$$= 2\pi(\tfrac{H^2}{2} + \tfrac{H^3}{3}) = \pi H^2 + \pi\tfrac{2}{3}H^3$$

6. (a)

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \\ x_2x_3 - x_3 \\ x_3^2 - 1 \end{bmatrix}$$

$$b = -f(1,1,1) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$f'(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ 0 & x_3 & x_2 - 1 \\ 0 & 0 & 2x_3 \end{bmatrix}, \quad A = f'(1,1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
$$Ah = b, \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$x = x_0 + h = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{(Exakt lösning.)}$$

(b)

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)h = 0, \quad f'(x_0)h = -f(x_0), \quad x = x_0 + h$$

(c)

```
function x = newton(f,x0,tol)

x = x0;
h = tol + 1;

while norm(h)>tol
   A = jacobi(f,x);       % evaluate the Jacobian A=Df(x)
   b = -f(x);             % evaluate the residual b=-f(x)
   h = A\b;               % solve the linearized equation
   x = x + h;             % update
end
```

7. Vi har

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{\rho}$$

Kedjeregeln ger

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{du}{d\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{du}{d\rho}\frac{x}{\rho} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{d^2u}{d\rho^2}\Big(\frac{\partial \rho}{\partial x}\Big)^2 + \frac{du}{d\rho}\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\rho} = \frac{d^2u}{d\rho^2}\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{du}{d\rho}\frac{\rho - x\frac{x}{\rho}}{\rho^2} \\
&= \frac{d^2u}{d\rho^2}\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{du}{d\rho}\Big(\frac{1}{\rho} - \frac{x^2}{\rho^3}\Big)
\end{aligned}$$

På samma vis

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{d^2u}{d\rho^2}\frac{y^2}{\rho^2} + \frac{du}{d\rho}\Big(\frac{1}{\rho} - \frac{y^2}{\rho^3}\Big) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{d^2u}{d\rho^2}\frac{z^2}{\rho^2} + \frac{du}{d\rho}\Big(\frac{1}{\rho} - \frac{z^2}{\rho^3}\Big)
\end{aligned}$$

så att

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{d^2u}{d\rho^2}\frac{x^2+y^2+z^2}{\rho^2} + \frac{du}{d\rho}\Big(\frac{3}{\rho} - \frac{x^2+y^2+z^2}{\rho^3}\Big) \\
&= \frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{du}{d\rho} = \frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\Big(\rho^2\frac{du}{d\rho}\Big)
\end{aligned}$$

`/stig`