MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Gustav Kettil/Stig Larsson (0733409006)
Telefonvakt: Olof Elias 5325

MVE255 2018
2018–10–12 kl. 08:30–12:30 (SB)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

MVE255 Analys i flera variabler M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilka tillsammans ger maximalt 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 6p) som tjänats ihop genom duggor. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Lösningar publiceras på kurshemsidan efter tentamens slut. Granskning kommer att ske vid ett tillfälle som annonseras på kurshemsidan.

Lycka till!

/stig

[Denna sida ska vara blank.]

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Gustav Kettil/Stig Larsson (0733409006)
Telefonvakt: Olof Elias 5325

MVE255 2018
2018–10–12 kl. 08:30–12:30 (SB)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

MVE255 Analys i flera variabler M

Tentamensuppgifter

---

1. Skriv ned hur man plottar ytan $z = 1 - x^2 - y^2$, $(x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2]$ i MATLAB. (3p)

2. Skriv ned hur man plottar en rät linje som går från punkten (3,2,1) till (4,5,6) i MATLAB. Tips: parametrisera och använd `plot3`. (3p)

3. Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z = \frac{x}{y} + \frac{8}{x} - y$ i punkten (1,1,8). (3p)

4. Är vektorfältet $\mathbf{F} = z^2\mathbf{i} + 6y\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ konservativt? Motivering krävs. (3p)

5. PDE Toolbox har randvärdesproblem av typen "Generic scalar problem": (3p)

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (c\nabla u) + au = f & \text{i } D, \\ n \cdot (c\nabla u) + qu = g & \text{på } S_2 \text{ (Neumann)}, \\ hu = r & \text{på } S_1 \text{ (Dirichlet)}. \end{cases}$$

Vi ska lösa ett problem där en del av randen är perfekt isolerad och resten av randen är oisolerad med omgivande temperatur 100 `[K]`. Vad ska vi fylla i för data på ränderna?

6. Skriv ned Newtons metod i MATLAB. Antag att funktionen `jacobi.m` finns. (3p)

7. Beräkna integralen $\iint_T (1 - x - y)^2 \, \mathrm{d}A$ där T är triangeln med hörn i (0,0), (1,0), (0,1). (3p)

8. Skriv ned Taylors polynom av grad 2 med baspunkt $a = (2, 2)$ för funktionen $f(x) = \dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{8}{x_1} - x_2$. (3p)

9. Beräkna riktningsderivatan av $f = x^2+y^2+z^2$ i punkten (1,1,1) i riktningen $\mathbf{v} = \mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$. (3p)

10. Beräkna integralen $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ där $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ och C är den räta linjen från $(3, 2, 1)$ till $(1, 2, 3)$. (3p)

11. Undersök funktionen $f(x) = \dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{8}{x_1} - x_2$ med avseende på maxima, minima och sadelpunkter. (5p)

12. (a) Visa att (5p)

$$\nabla \times (\nabla\phi) = \mathbf{0}$$

(b) Bevisa partialintegrationsformeln

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\phi \, \mathrm{d}V = \iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F}\phi \, \mathrm{d}S - \iiint_D \mathbf{F} \cdot \nabla\phi \, \mathrm{d}V$$

13. Vi betraktar värmeledning i området $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq Rz,\ 0 \leq z \leq R\}$. Här är R `[m]` en radie. Värmeledningskoefficienten a `[J/(m K s)]` är konstant. Vi vet att temperaturen är $u(x, y, z) = T\big(\frac{1}{2}(x/R)^2 + \frac{1}{2}(y/R)^2 + \frac{1}{3}(z/R)^3\big)$ med en konstant referenstemperatur T `[K]`. (5p)

(a) Bestäm totala värmeflödet ut genom toppytan $z = R$.

(b) Bestäm värmekälltätheten f inuti området D. Ange även dess enhet.

14. Beräkna det totala utflödet av värme genom hela randen i förra uppgiften. (5p)

/stig

MATEMATISKA VETENSKAPER **MVE255 2018**
Chalmers tekniska högskola **2018–10–12 kl. 08:30–12:30 (SB)**
Examinator: Gustav Kettil/Stig Larsson (0733409006) **Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa**
Telefonvakt: Olof Elias 5325

MVE255 Analys i flera variabler M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

MVE255 2018-10-12

1.
```
>> x = linspace(-2,2);
>> [X,Y] = meshgrid(x,x);
>> Z = 1-X.^2-Y.^2;
>> surf(X,Y,Z)
```

2. $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0P_1} = (4,5,6)-(3,2,1) = (1,3,5)$, $\mathbf{r} = (3,2,1)+t(1,3,5)$
```
>> t = linspace(0,1);
>> x = 3+t; y = 2+3*t; z = 1+5*t;
>> plot3(x,y,z)
```

3. $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \frac{u}{v} + \frac{8}{u} - v \end{cases}$

$\mathbf{r}'_u = \left(1, 0, \frac{1}{v} - \frac{8}{u^2}\right) \overset{(1,1,8)}{=} (1,0,1-8) = (1,0,-7)$

$\mathbf{r}'_v = \left(0, 1, \frac{-u}{v^2} - 1\right) = (0,1,-2)$

$\mathbf{N} = \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = (7,2,1)$

Planets ekv: $7(x-1)+2(y-1)+(z-8) = 0$

4. $\mathbf{F} = (z^2, 6y, xz)$, $\nabla \times \mathbf{F} = (0, 2z-z, 0) = (0,z,0) \neq \mathbf{0}$

Svar: nej.

5. På S_1: $h=1$, $r=100$. På S_2: $q=0$, $g=0$.

6.
```
function x = newton(f,x,tol)
    h = tol+1;
    while norm(h) > tol
        A = jacobi(f,x);
        b = -f(x);
        h = A\b;
        x = x+h;
    end
```

7. $\iint_T (1-x-y)^2 \, dA = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y)^2 dy \right) dx =$

$= \int_0^1 \left[-\frac{1}{3} (1-x-y)^3 \right]_0^{1-x} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (1-x)^3 dx = \frac{1}{12}$

8. $f(x) = \frac{x_1}{x_2} + \frac{8}{x_1} - x_2 , \quad f(2,2) = 3$

$f'(x) = \left[\frac{1}{x_2} - \frac{8}{x_1^2} , \ \frac{-x_1}{x_2^2} - 1 \right] , \quad f'(2,2) = \left[-\frac{3}{2} , \ -\frac{3}{2} \right]$

$f''(x) = \begin{bmatrix} \frac{16}{x_1^3} & \frac{-1}{x_2^2} \\ \frac{-1}{x_2^2} & \frac{2x_1}{x_2^3} \end{bmatrix} , \quad f''(2,2) = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$P_2(x) = 3 + \left[-\frac{3}{2} , -\frac{3}{2} \right] \begin{bmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} [x_1 - 2 , x_2 - 2] \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 2 \end{bmatrix}$

9. $f = x^2 + y^2 + z^2 , \quad \nabla f = (2x, 2y, 2z) , \quad \nabla f(1,1,1) = (2,2,2)$

$\mathbf{v} = (1,2,3) , \quad \hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{14}} (1,2,3)$

$D_{\hat{\mathbf{v}}} f(1,1,1) = \hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla f(1,1,1) = \frac{12}{\sqrt{14}}$

10. $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0 P_1} = (1,2,3) - (3,2,1) = (-2,0,2)$

$\mathbf{r} = (3,2,1) + t(-2,0,2) , \quad \mathbf{r}'(t) = (-2,0,2) , \quad t \in [0,1]$

$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt = \int_0^1 \left((3-2t)^2 , 2^2 , (1+2t)^2 \right) \cdot (-2,0,2) dt$

$= \int_0^1 \left(-2(3-2t)^2 + 2(1+2t)^2 \right) dt = 2 \left[\frac{1}{-2 \cdot 3} (3-2t)^3 \right]_0^1 + 2 \left[\frac{1}{2 \cdot 3} (1+2t)^3 \right]_0^1$

$= -\frac{1}{3} (1-27) + \frac{1}{3} (27-1) = -\frac{2}{3} + 18 = \frac{56}{3}$

11. $f(x) = \frac{x_1}{x_2} + \frac{8}{x_1} - x_2$.

Kritiska punkter ges av

$$f'(x)^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_2} - \frac{8}{x_1^2} \\ \frac{-x_1}{x_2^2} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi har en kritisk punkt: $x = (-4, 2)$

Hesse-matrisen är

$$f''(x) = \begin{bmatrix} \frac{16}{x_1^3} & \frac{-1}{x_2^2} \\ \frac{-1}{x_2^2} & \frac{2x_1}{x_2^3} \end{bmatrix}$$

$$f''(-4,2) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -1 \end{bmatrix}$$

Egenvärdena är $(-5 \pm \sqrt{13})/8 < 0 \Rightarrow$ lokalt max.

---

12 (a) $$\nabla \times (\nabla \phi) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right) = (0,0,0)$$

(b) $$\iiint_D \left((\nabla \cdot \mathbb{F})\phi + \mathbb{F} \cdot \nabla \phi \right) dV \overset{\text{produktregel}}{=} \iiint_D \nabla \cdot (\mathbb{F}\phi)\, dV =$$

$$\overset{\text{divergenssatsen}}{=} \iint_S \hat{\mathbb{N}} \cdot \mathbb{F} \phi \, dS$$

13. (a) $u = T\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{R}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{R}\right)^3\right)$

$$\nabla u = T\left(\frac{x}{R^2}, \frac{y}{R^2}, \frac{z^2}{R^3}\right) = \frac{T}{R}\left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \left(\frac{z}{R}\right)^2\right)$$

Flödestätheten: $\mathbb{F} = -a\nabla u$

Toppytan: $z = R,\ x^2+y^2 \le R^2,\ \hat{N} = \mathbb{k}$

$$\mathbb{F} = -a\frac{T}{R}\left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, 1\right)\cdot \mathbb{k} = -\frac{aT}{R}$$

Utflödet: $\iint_{S_1} \mathbb{F}\cdot\hat{N}\,dS = \iint_{S_1}\left(-\frac{aT}{R}\right)dS = -\frac{aT}{R}\cdot \pi R^2$

$$= -\pi a T R \qquad \left[\frac{J}{mKs}\,Km = \frac{J}{s}\right]$$

(b) Värmekälltätheten: $f = \nabla\cdot\mathbb{F} = \nabla\cdot(-a\nabla u) =$

$$= -a\,\nabla\cdot\nabla u = -a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) =$$

$$= -\frac{aT}{R}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + 2\frac{z}{R^2}\right) = -2\frac{aT}{R^2}\left(1 + \frac{z}{R}\right)$$

$$\left[\frac{J}{mKs}\,\frac{K}{m^2} = \frac{J}{m^3 s}\right]$$

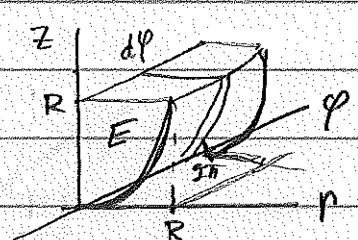
divergenssatsen

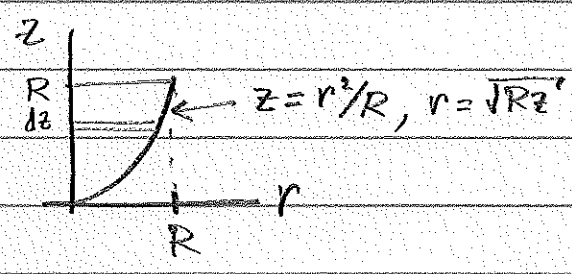
14. Totala utflödet: $\iint_S \hat{N} \cdot \mathbf{F}\, dS \stackrel{\downarrow}{=} \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV =$

$$= \iiint_D f\, dV = \iiint_D (-2)\frac{aT}{R^2}\left(1 + \frac{z}{R}\right) dV =$$

$$= -2\frac{aT}{R^2} \iiint_D \left(1 + \frac{z}{R}\right) dV$$ cylinderkoordinater

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad D: \begin{cases} x^2 + y^2 \le Rz \\ 0 \le z \le R \end{cases} \qquad E: \begin{cases} r^2 \le Rz \\ 0 \le z \le R \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$





$$\iiint_D \left(1 + \frac{z}{R}\right) dV = \iiint_E \left(1 + \frac{z}{R}\right) r\,dr\,d\varphi\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{Rz}} \left(1 + \frac{z}{R}\right) r\,dr \right) dz \right) d\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^R \left(1 + \frac{z}{R}\right) \cdot \left[\frac{1}{2} r^2\right]_0^{\sqrt{Rz}} dz = \pi \int_0^R \left(1 + \frac{z}{R}\right) Rz\, dz =$$

$$= \pi \int_0^R \left(Rz + z^2\right) dz = \pi\left(\frac{R^3}{2} + \frac{R^3}{3}\right) = \frac{5}{6}\pi R^3$$

Utflödet: $-2\frac{aT}{R^2} \cdot \frac{5}{6}\pi R^3 = -\frac{5}{3}\pi a T R.$

/stig