Matematik Chalmers

Tentamen i MVE255 Matematisk analys i flera variabler M, 2014–05–27 f V

Telefon: Elin Solberg 0703–088304
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Uppgift 1 och 2, totalt 20 poäng, bedöms huvudsakligen på svaret.

Uppgift 3–7 är värda 6 poäng vardera, totalt 30. De bedöms även på hur väl formulerade lösningarna är. Skriv väl, motivera och förklara vad du gör; endast välformulerade lösningar ger full poäng! Renskriv lösningarna, lämna inte in kladdpapper.

Betygsgränser: 3: 20–29p, 4: 30–39p, 5: 40–.

Lösningar anslås på kursens hemsida efter tentamens slut. Resultat meddelas per epost. Granskning: torsdag 12 juni, 10–12, hos Stig Larsson.

---

1. Frågor om datorövningarna. Här krävs tillfredställande svar på alla 5 delfrågorna. Varje deluppgift är värd 1 poäng, totalt 5.

(a) Vad används Matlab-funktionen `mesh` till?

(b) Hur löser man ekvationssystemet $x_1x_2 = 1; x_2 = x_1^2$ med hjälp av `newton.m`?

(c) Hur söker man stationära punkter till en funktion $f(x)$ med programmet `newton.m`?

(d) Vilka randvillkor har man när filen `EqData.m` innehåller koden

```
if tag==1  k=1;   uA=5;   g=1; end
if tag==2  k=1e8; uA=3;   g=0; end
```

(e) PDE Toolbox har dessa beteckningar för randvillkor:

$$\begin{aligned} &n\cdot(c\nabla u) + qu = g \qquad && \text{på } S_2 \text{ (Neumann)},\\ &hu = r && \text{på } S_1 \text{ (Dirichlet)}. \end{aligned}$$

Vad ska man fylla i för värden på en rand som är oisolerad med omgivande temperatur 10?

2. Varje deluppgift är värd 3 poäng, totalt 15.

(a) Bestäm en ekvation till tangentplanet till ytan $z = e^{xy}$ i punkten $(0, 2, 1)$.

(b) Beräkna Hesse-matrisen för funktionen $f(x, y) = \sin(xy)$.

(c) Beräkna yttröghetsmomentet $I_y = \iint_T x^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ för triangeln T med hörn i (0,0), (2,0), (1,1).

(d) Bestäm arbetet som uträttas av kraftfältet $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$ på en partikel som rör sig längs den räta linjen från $(0, 0, 0)$ till $(1, 2, 3)$. Tips: parametrisera kurvan först.

(e) Beräkna linjäriseringen av funktionen $f(x) = \begin{bmatrix} x_1x_2 \\ x_1^2x_3 \\ x_2^2 \end{bmatrix}$ i punkten $\begin{bmatrix} 1\\1\\1 \end{bmatrix}$.

3. Undersök funktionen $f(x, y) = e^{xy}$ med avseende på max, min och sadelpunkter.

4. (a) Randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} &-\mathrm{D}(a(x)\mathrm{D}u(x)) = f(x) \quad \text{för } x \in (0, L),\\ &u(0) = u_0,\ u'(L) = 0, \end{aligned}$$

beskriver ett värmeledningsproblem. Beskriv med ord vilket värmeledningsproblem det är. Ange vad de olika termerna betyder och ange deras SI-enheter.

(b) Lös detta randvärdesproblem med $a(x) = k$, $f(x) = g$, där k och g är konstanter. Beräkna även värmeflödet vid $x = 0$.

Vänd!

5. Beräkna integralen $\iiint_D x^3y^2z\,\mathrm{d}V$, där området D definieras av $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$, $0 \le z \le xy$.

6. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = z\mathbf{k}$ ut ur området D: $x^2 + y^2 \le z$, $0 \le z \le 1$. (Glöm inte att randytan har två delar.)

7. Härled värmeledningsekvationen: $-\nabla \cdot (a\nabla u) = f$ i D.

`/stig`

MVE255. 2014-05-27. Lösningar.

1. (a) Plotta en graf $z = f(x,y)$.

(b)

funk.m

```
function  y = funk(x)
   y = [x(1)*x(2) - 1; x_2 - x_1^2 = 0];
```

```
>> x = newton(@funk, [0;0], 1e-6)
```

(c)

```
>> gradfunk = @(x) jacobi(@funk, x)
>> x = newton(gradfunk, x0, 1e-6)
```

(d) $\begin{cases} -a(0)\,u'(0) + u(0) - 5 = 1 \\ u(L) = 3 \end{cases}$

(e) Dirichlet, $h = 1$, $r = 10$.

---

2 (a) $z = f(x,y)$, $f(x,y) = e^{xy}$, $f(0,2) = 1$

$f'(x,y) = [ye^{xy}, xe^{xy}]$, $f'(0,2) = [2,0]$

Tangentplanets ekv: (linjäriseringen)

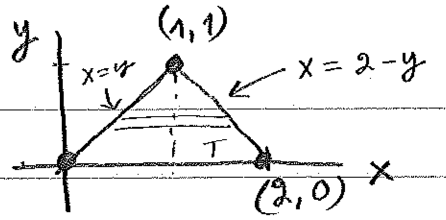
$$z = 1 + [2,0]\begin{bmatrix} x-0 \\ y-2 \end{bmatrix}$$

$$z = 1 + 2x$$

(b) $f(x,y) = \sin(xy)$, $f'(x,y) = [y\cos(xy), x\cos(xy)]$

$$D^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} -y^2\sin(xy), & \cos(xy) - xy\sin(xy) \\ \cos(xy) - xy\sin(xy), & -x^2\sin(xy) \end{bmatrix}$$

(c)



$$I_y = \iint_T x^2\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_y^{2-y} x^2\,dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} \right]_y^{2-y} dy = \frac{1}{3}\int_0^1 \left((2-y)^3 - y^3 \right) dy =$$

$$= \frac{1}{3} \left[-\frac{(2-y)^4}{4} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{12}\left(-1 - 1 + 2^4 \right) = \frac{14}{12}$$

(d) $\mathbf{r} = (0,0,0) + t(1,2,3), \quad t \in [0,1]$

$\mathbf{r}'(t) = (1,2,3), \quad d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)\,dt = (1,2,3)\,dt$

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (t \cdot 2t,\ t^2,\ 4t^2) \cdot (1,2,3)\,dt$$

$$= \int_0^1 \left(2t^2 + 2t^2 + 12t^2 \right) dt = 16 \int_0^1 t^2\,dt = \frac{16}{3}$$

(e) $f(x) = \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_1^2 x_3 \\ x_2^2 \end{bmatrix}, \quad f(1,1,1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$f'(x) = \begin{bmatrix} x_2, & x_1, & 0 \\ 2x_1x_3, & 0, & x_1^2 \\ 0 & 2x_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad f'(1,1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - 1 \end{bmatrix}$$

3. $f(x,y) = e^{xy}$

Stationära punkter ges av

$$f'(x,y)^T = \begin{bmatrix} y e^{xy} \\ x e^{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi har bara en lösning: $x = y = 0$.

Hesse-matrisen är

$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} y^2 e^{xy} & e^{xy} + xy e^{xy} \\ e^{xy} + xy e^{xy} & x^2 e^{xy} \end{bmatrix}$$

I den stationära punkten:

$$f''(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

med egenvärdena $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

Sadelpunkt i $(0,0)$.

---

4. (a) Värmeledning i en platta. $a(x)$ är värmeledningskoefficienten. Inre värmekälla med täthet f. Vänstra randen är oisolerad med omgivande temperatur u_0. Högra randen är perfekt isolerad. $u(x)$ är temperaturen. $u\ [K]$, $a\ [\frac{J}{mKs}]$, $f\ [\frac{J}{m^3 s}]$

(b)

$$-D(kDu) = g$$

$$D^2 u = -g/k$$

$$Du = -\frac{g}{k}x + A$$

$$u = -\frac{g}{k}\frac{x^2}{2} + Ax + B$$

Randvillkoren ger

$$\begin{cases} u_0 = u(0) = B \\ 0 = u'(L) = -\frac{g}{k}L + A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = u_0 \\ A = \frac{gL}{k} \end{cases}$$

Vi får $\quad u(x) = u_0 + \frac{g}{k}\left(Lx - \frac{1}{2}x^2\right).$

Flödet vid $x=0$ är

$$j(0) = -k\,Du(0) = -gL.$$

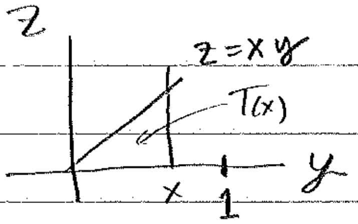
---

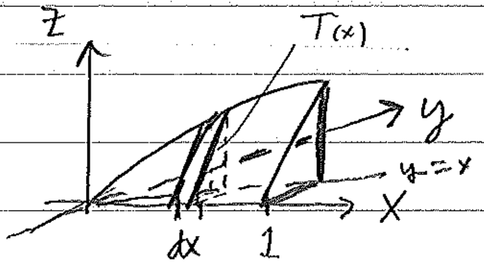
5. $$\iiint_D x^3y^2z\,dV = \int_0^1\left(\iint_{T(x)} x^3y^2z\,dy\,dz\right)dx =$$

$$= \int_0^1\int_0^x\int_0^{xy} x^3y^2z\,dz\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1\int_0^x x^3y^2\frac{(xy)^2}{2}\,dy\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^5\int_0^x y^4\,dy\,dx$$

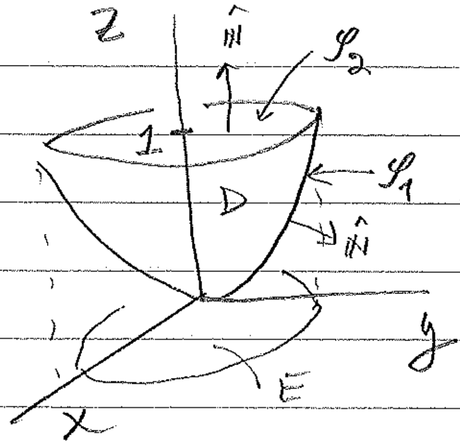
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^5\frac{x^5}{5}\,dx = \frac{1}{10}\int_0^1 x^{10}\,dx = \frac{1}{110}.$$





---

6. $\mathbb{F} = z\mathbb{K}$, $D: x^2+y^2 \le z$, $0 \le z \le 1$



På topp-ytan S_2:

$z = 1$, $\hat{N} = \mathbb{K}$ (ut)

$\mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}} = z = 1$

$$\iint_{S_2} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS = \iint_{S_2} 1\, dS = \pi \quad \text{(arean av } E\text{)}$$

På buktiga ytan S_1: $z = r^2$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & 0 \le r \le 1 \\ y = r\sin\theta & 0 \le \theta \le 2\pi \\ z = r^2 \end{cases}$$

$$\mathbb{N} = \pm \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \pm \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbb{K} \\ \cos\theta & \sin\theta & 2r \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \pm(-2r^2\cos\theta, -2r^2\sin\theta, r)$$

Välj minus för utåtriktning.

$$d\mathbf{S} = \hat{\mathbb{N}}\, dS = -(-2r^2\cos\theta, -2r^2\sin\theta, r)\, dr\, d\theta$$

$$\iint_{S_2} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS = \iint_E (0, 0, r^2) \cdot (2r^2\cos\theta, 2r^2\sin\theta, -r)\, dr\, d\theta$$

$$= \iint_E (-r^3)\, dr\, d\theta = -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3\, dr = -2\pi \cdot \frac{1}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

Totala utflödet: $\iint_S \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

7. FEM2