MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Stig Larsson (0733409006)
Telefonvakt: Jimmy Johansson 5325

MVE255 2019
2019–06–04 kl. 14:00–18:00 (SB Multi)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

MVE255 Analys i flera variabler M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilka tillsammans ger maximalt 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 6p) som tjänats ihop genom duggor. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Lösningar publiceras på kurshemsidan efter tentamens slut. Granskning kommer att ske vid ett tillfälle som annonseras på kurshemsidan.

Lycka till!

`/stig`

[Denna sida ska vara blank.]

MVE255 Analys i flera variabler M

Tentamensuppgifter

---

1. Bestäm en ekvation för tangentlinjen till kurvan $\mathbf{r} = 3t\mathbf{e}_x - t\mathbf{e}_y + t^2\mathbf{e}_z$ i punkten $(3, -1, 1)$. (3p)

2. En partikel rör sig enligt $\mathbf{r} = 3t\mathbf{e}_x - t\mathbf{e}_y + t^2\mathbf{e}_z$. Beräkna tangentkomponenten av accelerationen vid tiden t. Tips: kom ihåg enhetstangenten $\hat{\mathbf{T}}(t)$. (3p)

3. Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 12$ i punkten (1,-1,4). (3p)

4. Vad menas med att ett vektorfält är konservativt? (3p)

5. PDE Toolbox har randvärdesproblem av typen "Generic scalar problem": (3p)

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (c\nabla u) + au = f & \text{i } D, \\ n \cdot (c\nabla u) + qu = g & \text{på } S_2 \text{ (Neumann)}, \\ hu = r & \text{på } S_1 \text{ (Dirichlet)}. \end{cases}$$

Vi har fyllt i följande data: $c = 10$, $a = 0$, $f = 20$, $q = 3$, $g = 27$, $h = 1$, $r = 9$. Det finns inga yttre värmekällor på randen. Vad är då omgivningens temperatur på S_1 respektive S_2?

6. Skriv ned Newtons metod som en MATLAB-funktion. Antag att funktionen `jacobi.m` finns. (3p)

7. Beräkna arbetet som uträttas av kraftfältet $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ på en partikel som förflyttas längs kurvan $x^2 - y^2 = 1$ från punkten $(\sqrt{2}, -1)$ till punkten $(\sqrt{2}, 1)$. (3p)

8. Beräkna $\iint_T \exp(x^2)\,\mathrm{d}A$ där T är triangeln med hörn i $(0, 0)$, $(1, 0)$ och $(1, 1)$. (3p)

9. Betrakta integralen $\iiint_B z\,\mathrm{d}V$ där B är halvklotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ z \geq 0$. Transformera denna integral till sfäriska koordinater. Du ska inte räkna ut integralen. (3p)

10. Låt $\mathbf{u}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Bevisa formeln $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\mathbf{u}(t)\|^2 = 2\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{u}'(t)$. (3p)

`Vänd!`

11. (Lagranges multiplikatormetod.) (5p)

(a) Formulera satsen om Lagranges multiplikatormetod.

(b) Optimeringsproblem: Minimera $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$ under bivillkoret $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Skriv ned MATLAB-kod som löser detta problem. Utgå från att programmen `newton.m` och `jacobi.m` finns.

12. (Härledning av värmeledningsekvationen.) Vi studerar värmeledning i rätblocket $D = [0, L]\times[0, L]\times[0, L]$. Temperaturen är $u(x, y, z) = u_0xyz/L^3$ och värmeledningskoefficienten är $a(x, y, z) = a_0 \exp(x/L)$. Konstanterna är L `[m]`, u_0 `[K]` och a_0 `[J/(m K s)]`. (5p)

(a) Bestäm värmeflödestätheten i D. Ange dess enhet.

(b) Bestäm källtätheten i D. Ange dess enhet.

(c) Bestäm totala värmeflödet ut genom randen ∂D. Ange dess enhet.

13. (Flödesintegral.) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + (1 + z)\mathbf{e}_z$ ut ur området $D = \{(x, y, z) : 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2\}$ utan att använda divergenssatsen. (5p)

14. (Partiell integration.) Formulera och bevisa formeln för partiell integration i 3 variabler. (5p)

`/stig`

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Stig Larsson (0733409006)
Telefonvakt: Jimmy Johansson 5325

MVE255 2019
2019–06–04 kl. 14:00–18:00 (SB Multi)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

MVE255 Analys i flera variabler M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

MVE255 Analys i flera variabler M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1	$\begin{cases} x = 3+3t \\ y = -1-t \\ z = 1+2t \end{cases}$	
2	$\dfrac{4t}{\sqrt{10+4t^2}}$	
3	$x-y-2z=-6$	
4	Det finns ϕ så att $\nabla\phi = \mathbb{F}$	
5	$u_A = 9$ på både S_1 och S_2	

6	function x = newton(f, x0, TOL)
	x=x0; b=-f(x);
	while norm(b)>TOL
	b=-f(x);
	A=jacobi(f,x);
	h=x+h;
	end	

7	$\dfrac{2}{3}$	
8	$\frac{1}{2}(e-1)$	
9	$\int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{\pi/2} \cos(\phi)\sin(\phi)d\phi \int_0^{2\pi} d\theta$	
10	$\frac{d}{dt}\lVert u(t)\rVert^2 = \frac{d}{dt}\left(u_x(t)^2 + u_y(t)^2 + u_z(t)^2\right) =$ $= 2u_x(t)u_x'(t) + 2u_y(t)u_y'(t) + 2u_z(t)u_z'(t)$ $= 2\left(u_x(t), u_y(t), u_z(t)\right)\cdot\left(u_x'(t), u_y'(t), u_z'(t)\right)$ $= 2\,\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{u}'(t)$	

MVE255 2019-06-04

1. $\mathbb{r}(t)=(3t,-t,t^2)$, $\mathbb{r}(1)=(3,-1,1)$

$\mathbb{v}(t)=\mathbb{r}(t)=(3,-1,2t)$, $\mathbb{v}(1)=(3,-1,2)$

Tangentlinjen: $\mathbb{r}(t)=(3,-1,1)+t(3,-1,2)$

eller $\begin{cases} x = 3+3t \\ y=-1-t \\ z = 1+2t \end{cases}$

2. $\mathbb{T}(t)=\mathbb{v}(t)=\mathbb{r}'(t)=(3,-1,2t)$, $\|\mathbb{T}(t)\|=\sqrt{10+4t^2}$

$$\hat{\mathbb{T}}(t)=\frac{(3,-1,2t)}{\sqrt{10+4t^2}}$$

$\mathbb{a}(t)=\mathbb{v}'(t)=(0,0,2)$

Tangentkomponenten: $\mathbb{a}(t)\cdot\hat{\mathbb{T}}(t)=\dfrac{4t}{\sqrt{10+4t^2}}$

3. $z=(\pm)\sqrt{12+2x^2+2y^2}$, $P=(1,-1,4)$

$\begin{cases} x=u \\ y=v \\ z=\sqrt{12+2u^2+2v^2} \end{cases}$

$\mathbb{r}'_u=\left(1,0,\dfrac{2u}{\sqrt{12+2u^2+2v^2}}\right)$, $\mathbb{r}'_u(1,-1)=\left(1,0,\frac{2}{4}\right)=\left(1,0,\frac{1}{2}\right)$

$\mathbb{r}'_v=\left(0,1,\dfrac{2v}{\sqrt{12+2u^2+2v^2}}\right)$, $\mathbb{r}'_v(1,-1)=\left(0,1,-\frac{1}{2}\right)$

$\mathbb{N}=\mathbb{r}'_u(1,-1)\times\mathbb{r}'_v(1,-1)=\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2},1\right)$

Planets ekv.: $-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y+1)+z-4=0$

$(x-1)-(y+1)-2(z-4)=0$

$x-y-2z=-6$

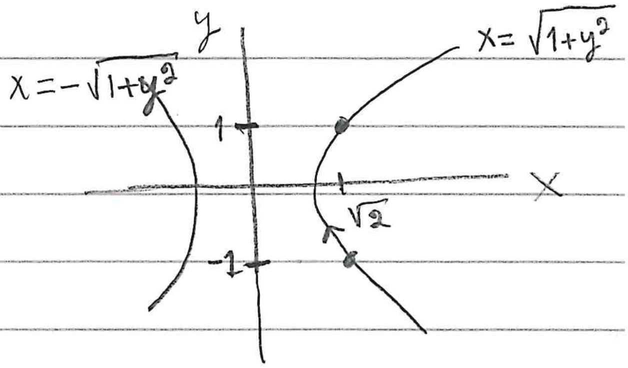
4. $\mathbb{F}$ är konservativt om $\exists \phi$ så att $\mathbb{F} = \nabla \phi$.

5. $\mu_A = 9$ på S_1, $\mu_A = \frac{q}{p} = \frac{27}{3} = 9$ på S_2

6.

```
function x1 = newton(f, x0, TOL)
    x = x0;   b = -f(x);
    while norm(b) > TOL
        b = -f(x);
        A = jacobi(f, x);
        h = A\b;
        x = x+h
    end
    x1 = x;
end
```

7. $x = (\pm)\sqrt{1+y^2}$



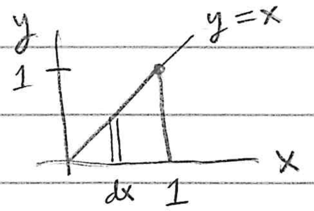
$$\begin{cases} x = \sqrt{1+t^2} \\ y = t \end{cases}$$

$$\mathbb{r}'(t) = \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, 1\right)$$

$$\mathbb{F}(\mathbb{r}(t)) \cdot \mathbb{r}'(t) = \left(\sqrt{1+t^2}\,t, t\right) \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, 1\right) = t^2 + t$$

$$\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \int_{-1}^{1} (t^2+t)\,dt = \frac{2}{3}$$

8. $$\iint_T e^{x^2}\,dA = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{x^2}\,dy \right) dx =$$



$$= \int_0^1 e^{x^2} [y]_0^x\,dx = \int_0^1 x e^{x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$$

9. $$\iiint_B z\,dV = \iiint_R \rho\cos(\phi)\,\rho^2\sin(\phi)\,d\rho\,d\phi\,d\theta \quad \begin{cases} x=\rho\sin(\phi)\cos\theta \\ y=\rho\sin(\phi)\sin(\theta) \\ z=\rho\cos(\phi) \end{cases}$$

$$= \int_0^R \rho^3\,d\rho \int_0^{\pi/2} \cos(\phi)\sin(\phi)\,d\phi \int_0^{2\pi} d\theta, \quad R=[0,R]\times[0,\tfrac{\pi}{2}]\times[0,2\pi].$$

10. $$\|u(t)\|^2 = u_x(t)^2+u_y(t)^2+u_z(t)^2$$

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 = 2u_x(t)u_x'(t)+2u_y(t)u_y'(t)+2u_z(t)u_z'(t)$$

$$=2\big(u_x(t),u_y(t),u_z(t)\big)\bullet\big(u_x'(t),u_y'(t),u_z'(t)\big)$$

$$=2\,u(t)\bullet u'(t).$$

---

11. (a) Antag att $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ är deriverbara. Antag att $\bar{x}$ är en extrempunkt till f under bivillkoret $g(x)=0$ och att $g'(\bar{x})\neq 0$. Då finns $\bar{\lambda}\in\mathbb{R}$ så att $(\bar{x},\bar{\lambda})\in\mathbb{R}^{n+1}$ är kritisk punkt till funktionen

$$L(x,\lambda)=f(x)+\lambda g(x).$$

(b)
```
f = @(x) x(1)^2 * x(2)^2 * x(3)^2;
g = @(x) x(1)^2 + x(2)^2 + x(3)^2 - 4;
L = @(x) f(x(1:3)) + x(4)*g(1:3);
DL = @(x) jacobi(L,x)';
x0 = [1;1;1;1];
x = newton(DL, x0, 1e-6);
y = f(x(1:3))
```

12. $u(x,y,z) = u_0 \dfrac{xyz}{L^3}$, $a(x,y,z) = a_0 e^{x/L}$

(a) Värmeflödestätheten: $\mathbf{F} = -a\nabla u =$

$$= -a_0 e^{x/L} \frac{u_0}{L^3}(yz, xz, xy) =$$

$$= -\frac{a_0 u_0}{L^3}\left(e^{x/L}yz,\ e^{x/L}xz,\ e^{x/L}xy\right) \left[\frac{J}{m^2 s}\right]$$

(b) Källtätheten: $f = \nabla\cdot\mathbf{F} =$

$$= -\frac{a_0 u_0}{L^3}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x/L}yz\right) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x/L}xz\right)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{x/L}xy\right)}_{=0}\right)$$

$$= -\frac{a_0 u_0}{L^3}\frac{1}{L}e^{x/L}yz = -\frac{a_0 u_0}{L^4}e^{x/L}yz \left[\frac{J}{m^3 s}\right]$$

(c) Totala utflödet genom $S = \partial D$ är enligt divergenssatsen

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS = \iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \iiint_D f\,dV =$$

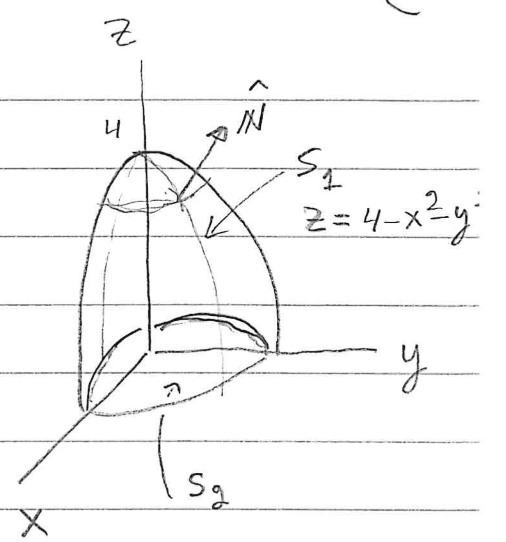
$$= -\frac{a_0 u_0}{L^4}\iiint_D e^{x/L}yz\,dV = \{\text{Fubini}\} =$$

$$= -\frac{a_0 u_0}{L^4}\int_0^L e^{x/L}dx\int_0^L y\,dy\int_0^L z\,dz =$$

$$= -\frac{a_0 u_0}{L^4}\left[Le^{x/L}\right]_0^L \frac{L^2}{2}\frac{L^2}{2} = -a_0 u_0 L\cdot\frac{1}{4}(e-1) \left[\frac{J}{s}\right]$$

(5

13. Buktiga ytan S_1:



$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 4-u^2-v^2 \end{cases} \qquad (u,v) \in S_2$$

$$\mathbb{r}'_u = (1, 0, -2u)$$
$$\mathbb{r}'_v = (0, 1, -2v)$$

$$\mathbb{r}'_u \times \mathbb{r}'_v = (2u, 2v, 1) \quad \text{uppåt, utåt}$$

$$\iint_{S_1} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS = \iint_{S_2} \mathbb{F}(\mathbb{r}(u,v)) \cdot (\mathbb{r}'_u \times \mathbb{r}'_v)\, du\, dv$$

$$= \iint_{S_2} (u, v, 1+4-u^2-v^2) \cdot (2u, 2v, 1)\, du\, dv$$

$$= \iint_{S_2} (5+u^2+v^2)\, du\, dv = \{\text{polära}, R=[0,2]\times[0,2\pi]\}$$

$$= \iint_R (5+r^2)\, r\, dr\, d\theta = \{\text{Fubini}\} =$$

$$= \int_0^2 (5r+r^3)\, dr \int_0^{2\pi} d\theta = \left[5\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4}\right]_0^2 \cdot 2\pi =$$

$$= (10+4) \cdot 2\pi = 28\pi$$

På bottenytan S_2: $z=0$, $x^2+y^2 \le 4$, $\hat{\mathbb{N}} = -\mathbb{e}_z$

$$\mathbb{F}(x,y,0) \cdot \hat{\mathbb{N}} = (x,y,1) \cdot (0,0,-1) = -1$$

$$\iint_{S_2} \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS = -\iint_{S_2} dS = -\text{area}(S_2) = -4\pi$$

Totala utflödet:

$$\iint_S \mathbb{F} \cdot \hat{\mathbb{N}}\, dS = 28\pi - 4\pi = 24\pi$$

---

14. $\nabla \cdot (f\mathbb{F}) = (\nabla f) \cdot \mathbb{F} + f\, \nabla \cdot \mathbb{F} \quad (*)$

Divergenssatsen:

$$\iint_S \hat{\mathbb{N}} \cdot (f\mathbb{F})\, dS = \iiint_D \nabla \cdot (f\mathbb{F})\, dV \overset{(*)}{=}$$

$$= \iiint_D (\nabla f) \cdot \mathbb{F}\, dV + \iiint_D f\, \nabla \cdot \mathbb{F}\, dV$$

Vi har bevisat denna

Sats (partiell integration)

Antag D är område vars rand S är en sluten orienterad yta med utåtriktat enhetsnormalvektorfält $\hat{\mathbb{N}}$. Antag att f och $\mathbb{F}$ är kontinuerligt deriverbara i D. Då gäller

$$\iiint_D (\nabla f) \cdot \mathbb{F}\, dV = \iint_S \hat{\mathbb{N}} \cdot (f\mathbb{F})\, dS - \iiint_D f\, \nabla \cdot \mathbb{F}\, dV$$

Istig