MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Stig Larsson (0733409006)
Telefonvakt: Olof Zetterqvist 5325

MVE255 2019
2019–10–11 kl. 08:30–12:30 (SB Multi)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

MVE255 Analys i flera variabler M

Tentamen

Tentamen består av 10 st uppgifter vardera värda 3p och 4 st uppgifter vardera värda 5p, vilka tillsammans ger maximalt 50p. Till detta läggs de bonuspoäng (maximalt 6p) som tjänats ihop genom duggor. Betygsgränser är 20p (betyg 3), 30p (betyg 4) och 40p (betyg 5) för det sammanlagda resultatet.

Till de första tio uppgifterna (3p-uppgifter) skall endast svar ges. Svar måste anges i rätt ruta på den bifogade svarsblanketten. Lämna ej in lösningar eller kladdpapper till dessa uppgifter!

Till de sista fyra uppgifterna (5p-uppgifter) skall utförliga, tydliga och välskrivna lösningar ges. Renskriv dina lösningar, lämna ej in kladdpapper! Poängavdrag ges för dåligt motiverade, svårtolkade eller svårläsliga lösningar.

Lösningar publiceras på kurshemsidan efter tentamens slut. Granskning kommer att ske vid ett tillfälle som annonseras på kurshemsidan.

Lycka till!

`/stig`

[Denna sida ska vara blank.]

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Stig Larsson (0733409006)
Telefonvakt: Olof Zetterqvist 5325

MVE255 2019
2019–10–11 kl. 08:30–12:30 (SB Multi)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

MVE255 Analys i flera variabler M

Tentamensuppgifter

---

1. Bestäm längden av kurvan $\mathbf{r}(t) = a\cos(t)\mathbf{e}_x + a\sin(t)\mathbf{e}_y + bt\mathbf{e}_z$, $t \in [0, 2\pi]$. (3p)

2. Bestäm en ekvation för tangentlinjen till kurvan $\mathbf{r}(t) = a\cos(t)\mathbf{e}_x + a\sin(t)\mathbf{e}_y + bt\mathbf{e}_z$ i punkten $(-a, 0, \pi b)$. (3p)

3. Bestäm riktningsderivatan av funktionen $f(x, y) = x^2\sin(2y)$ i punkten $(1, \pi/2)$ i riktningen $\mathbf{v} = 4\mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_y$. (3p)

4. Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ i punkten (1,1,1). (3p)

5. Skriv ned Taylors polynom av grad 2 i punkten $(1, 1, 1)$ för funktionen $f(x) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$. (3p)

6. Rita en figur som visar integrationsområdet D i integralen (3p)

$$\iint_D f\,\mathrm{d}A = \int_{-2}^{0}\Big(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x.$$

7. Beräkna integralen $\displaystyle\int_{-2}^{0}\Big(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x$ från förra uppgiften. (3p)

8. Skriv ned kommandorader för att plotta grafen $z = x^2 + y^2$, $(x, y) \in [-3, 3] \times [-2, 2]$ i Matlab. (3p)

9. Formulera Fubinis sats för dubbelintegralen. (3p)

10. Skriv ned Newtons metod som en Matlab-funktion. Antag att funktionen `jacobi.m` finns. (3p)

Vänd!

11. (Lagranges multiplikatormetod) Visa att en rektangulär låda med fix volym och minimal yta är en kub. Tips: antag att sidorna är x, y, z, ställ upp formler för volymen V och arean A. Minimera sedan A med bivillkoret $V =$ konstant. (5p)

12. (a) Härled Newtons metod för ekvationssystem på formen $f(x) = 0$. (3p) (5p)

(b) Hitta på ett sådant ekvationssystem (med minst två ekvationer) och genomför ett steg av Newtons metod på detta system. (2p)

13. (a) Beräkna utflödet av vektorfältet $\mathbf{F} = -y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y + (1 - x^2 - y^2)z^2\mathbf{e}_z$ genom begränsningsytan S till cylindern D som ges av $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$. (5p)

(b) Beräkna den del av utflödet som går genom mantelytan S_1 som ges av $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$.

14. Formulera och bevisa satsen som säger att tangentkurvintegralen av ett konservativt vektorfält är oberoende av vägen. (5p)

`/stig`

MATEMATISKA VETENSKAPER
Chalmers tekniska högskola
Examinator: Stig Larsson (0733409006)
Telefonvakt: Olof Zetterqvist 5325

MVE255 2019
2019–10–11 kl. 08:30–12:30 (SB Multi)
Hjälpmedel: inga, inte ens räknedosa

MVE255 Analys i flera variabler M

Svar till tentamensuppgifter 1–10

Tentamenskod: ....

Uppgift	Svar	Poäng
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

MVE255 2019-10-11

1. $\mathbf{r}(t) = (a\cos(t),\ a\sin(t),\ bt)$

$\mathbf{r}'(t) = (-a\sin(t),\ a\cos(t),\ b)$

$ds = |\mathbf{r}'(t)|\,dt = \sqrt{a^2+b^2}\,dt$

$L = \int_C ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2}\,dt = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}$

2. $P = (-a, 0, \pi b) = \mathbf{r}(\pi)$

$\mathbf{v} = \mathbf{r}'(\pi) = (0, -a, b)$

$\mathbf{r} = (-a, 0, \pi b) + t(0, -a, b), \quad t \in (-\infty, \infty)$

$\begin{cases} x = -a, \\ y = -at, \\ z = \pi b + bt, \end{cases} \quad t \in (-\infty, \infty)$

3. $f(x,y) = x^2\sin(2y), \quad \nabla f(x,y) = (2x\sin(2y),\ 2x^2\cos(2y))$

$\nabla f(1, \pi/2) = (0, -2), \quad \hat{\mathbf{v}} = \frac{(4,3)}{\sqrt{16+9}} = \frac{1}{5}(4,3)$

$D_{\mathbf{v}} f(1, \pi/2) = \hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla f(1, \frac{\pi}{2}) = -\frac{6}{5}.$

4. $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$

$\nabla f(x,y,z) = (2x, 4y, 6z), \quad \nabla f(1,1,1) = (2, 4, 6) = 2(1,2,3)$

$\mathbf{N} = (1,2,3)$

Planets ekv: $1(x-1) + 2(y-1) + 3(z-1) = 0$

$x + 2y + 3z = 6$

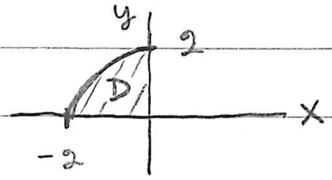
5. $f(x) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3, \quad f(1,1,1) = 3$

$f'(x) = [3x_1^2,\ 3x_2^2,\ 3x_3^2], \quad f'(1,1,1) = [3, 3, 3]$

$f''(x) = \begin{bmatrix} 6x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 6x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 6x_3 \end{bmatrix} \quad f''(1,1,1) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

$L_2[f](x) = 3 + [3,3,3]\begin{bmatrix} x_1-1 \\ x_2-1 \\ x_3-1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}[x_1-1,\ x_2-1,\ x_3-1]\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1-1 \\ x_2-1 \\ x_3-1 \end{bmatrix}$

MVE255 2019-10-11

6. 

$D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4, \ -2 \leq x \leq 0\}$

7. Polära koordinater: $D \rightarrow R = [0,2] \times [\frac{\pi}{2}, \pi]$

$$\int_{-2}^{0} \left(\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2)\, dy \right) dx = \iint_R r^2\, r\,dr\,d\theta = \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \int_0^2 r^3 dr =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 2\pi$$

8.
```
>> x = linspace(-3,3); y = linspace(-2,2)
>> [X, Y] = meshgrid(x,y);
>> Z = X.^2.*Y.^2;
>> surf(X,Y,Z)
```

9. Om f är kontinuerlig på $R = [a,b] \times [c,d]$ så gäller

$$\iint_R f\, dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx =$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy$$

10.
```
function x = newton(f, x0, tol)
  x = x0; b = -f(x);
  while norm(b) > tol
    b = -f(x);
    A = jacobi(f,x);
    h = A\b;
    x = x+h;
  end
end
```

MVE255 2019-10-11

11. Arean: $f(x,y,z) = 2xy + 2xz + 2yz$

Bivillkor: $g(x,y,z) = xyz - V = 0$

Vi vill visa att $x=y=z$ då arean är minimal med $xyz=V$.

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) =$$

$$= 2(xy+xz+yz) + \lambda xyz$$

Vi kan antaga att $x>0, y>0, z>0$, annars blir $xyz=0 \neq V$.

Kritiska punkter till $\mathcal{L}$ ges av

$$\mathcal{L}'(x,y,z)^T = 0$$

dvs

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x(x,y,z,\lambda) = 2(y+z) + \lambda yz = 0 & (1) \\ \mathcal{L}'_y(x,y,z,\lambda) = 2(x+z) + \lambda xz = 0 & (2) \\ \mathcal{L}'_z(x,y,z,\lambda) = 2(x+y) + \lambda xy = 0 & (3) \\ \mathcal{L}'_\lambda(x,y,z,\lambda) = xyz - V = 0 & (4) \end{cases}$$

Eliminera λ ur (1), (2), (3):

$$-\frac{\lambda}{2} = \frac{y+z}{yz} = \frac{x+z}{xz} = \frac{x+y}{xy}$$

Förläng med x, y, respektive z:

$$\frac{xy+xz}{xyz} \overset{(5)}{=} \frac{xy+yz}{xyz} \overset{(6)}{=} \frac{xz+yz}{xyz} \quad \text{där } xyz=V$$

(5) ger $xy + xz = xy + yz \Rightarrow xz = yz \Rightarrow x=y$ ty $z \neq$

(6) ger på samma vis $y=z$. Alltså: $x=y=z$, en kub.

MVE255 2019-10-11

12 (a) Approximativ lösning $\bar{x}$. Vi söker $x = \bar{x} + h$.
Lös linjäriserade ekvationen:

$$f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h = 0$$

$$f'(\bar{x})h = -f(\bar{x}), \quad h = -f'(\bar{x})^{-1} f(\bar{x})$$

$$x = \bar{x} + h$$

Upprepa.

(b) $\begin{cases} xy = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ $\quad f(x) = \begin{bmatrix} x_1 x_2 - 1 \\ x_1^2 + x_2^2 - 4 \end{bmatrix}$, $f'(x) = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}$

$x = (1,1)$, $b = -f(1,1) = -\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $A = f'(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$\det(A) = 0$, singulär matris, går ej.

Försök med $x = (0,1)$, $b = -f(0,1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $A = f'(0,1) =$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, Lös $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $h = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$,

$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5/2 \end{bmatrix}$

---

13. (a) Vi använder divergenssatsen och cylindriska koordinater r, θ, z:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 2(1 - x^2 - y^2)z = 2(1 - r^2)z$$

Utflödet blir

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iiint_R 2(1-r^2) z r \, dr\, d\theta\, dz$$

$$= 2\int_0^1 z\, dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r - r^2)\, dr = \frac{\pi}{2}$$

(b) På mantelytan S_1 har vi $\hat{N} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ så att $\mathbb{F}\cdot\hat{N} = 0$ på S_1. Alltså: $\iint_{S_1} \mathbb{F}\cdot\hat{N}\, dS = 0$.

14. Se sats 5.1 i boken.

/Stig