Matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Lösningar till
Tentamen i Linjär algebra AT, MVE275, 2008-10-20

1. För första deluppgiften se sidan 227 i boken. För andra deluppgiften har vi t ex att om $c \neq 1$ och $A\mathbf{x} = \mathbf{u}$ så är $A(c\mathbf{x}) = c\mathbf{u} \neq \mathbf{u}$. Därmed är inte W ett delrum. (Om $W = \emptyset$ så finns inte nollvektorn i W som då inte heller är ett delrum.)

2. Svaren är som följer:

   (a) Sant, karakteristiska ekvationen är en tredjegradsekvation och sådana har alltid minst 1 reell rot.

   (b) Falskt, ta t ex $B = -A$.

   (c) Falskt, ta t ex $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_3 \neq \mathbf{0}$ och $\mathbf{v}_2$ ortogonal mot denna.

   (d) Sant, A inverterbar om och endast om A^T inverterbar och en kvadratisk matris är inverterbar om och endast om den har linjärt oberoende kolumner.

   (e) Falskt, differensen mellan vänster- och högerledet är $-2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ så olikheten gäller om och endast om $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \leq 0$, d v s om och endast om vinkeln mellan vektorerna är rät eller trubbig.

   (f) Falskt, ta t ex A en matris som skalar med en faktor $s \neq \pm 1$.

3. Om man gör Gausselimination på matrisen så får man följande trappstegsmatris:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & -6 & -17 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Det finns två pivotelement som ligger i första respektive andra kolumnen. Detta visar att rangen av matrisen är 2 samt att de två första kolumnerna i A utgör en bas för kolumnrummet.

4. Om P är matrisen för projektionen och R är matrisen för rotationen så är den sökta matrisen $A = RP$. Båda de två standardbasvektorerna avbildas på $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T$ så matriserna ges av

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}) & -\sin(\frac{\pi}{3}) \\ \sin(\frac{\pi}{3}) & \cos(\frac{\pi}{3}) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \text{ och } P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   så

$$A = RP = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

5. Vi bestämmer egenvärdena med hjälp av den karakteristiska ekvationen och utnyttjar att vi vet att ett av egenvärdena är 1 så att $(1-\lambda)$ är en faktor. Vi får

$$0 = \det(B - \lambda I) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6 = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 6)$$

vilket ger egenvärdena $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ och $\lambda_3 = -2$. Egenvektorerna får vi sedan genom att lösa de homogena ekvationssystemen $(B - \lambda_i I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ för $i = 1, 2, 3$. Detta ger egenvektorer som är multipler av

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Eftersom vi har tre olika egenvärden så är B diagonaliserbar med

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \text{ och } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

6. Vi bestämmer först en ortogonal bas $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ med hjälp av Gram-Schmidts algoritm. Vi får

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{b}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vi normerar denna och får följande ortonormerade bas:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{19}} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Enklaste sättet att utvidga denna till en ortonormerad bas för $\mathbb{R}^3$ är att ta vektorprodukten av de två basvektorerna. Denna kommer att vara ortogonal mot båda och om man normerar denna så utvidgar den vår bas för W till en ortonormerad bas för $\mathbb{R}^3$. Alternativt så kan man ta vektor $\mathbf{v}_3$ som inte ligger i W, t ex $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ och använda Gram-Schmidts algoritm igen:

$$\mathbf{b}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2}\mathbf{b}_2 = \frac{8}{266} \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

Vi normerar denna och får följande ortonormerade bas för $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{19}} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{266}} \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ -9 \end{bmatrix} \right\}.$$

7. Låt C_n vara antalet bilar på Centralen i början av vecka n, L_n antalet på Landvetter och U_n antalet som är uthyrda. Sätt $\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} C_n & L_n & U_n \end{bmatrix}^T$. Informationen i uppgiften ger då att

$$\mathbf{x}_{n+1} = P\mathbf{x}_n = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}\mathbf{x}_n.$$

En stationär fördelning $\mathbf{v}$ måste vara en egenvektor till P med egenvärdet 1 så det är alltså en lösning till $P\mathbf{v} = \mathbf{v}$, d v s

$$\mathbf{0} = (P - I)\mathbf{v} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{v}.$$

Vi löser detta homogena ekvationssystem med Gausselimination och får

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -11 & 9 \\ 0 & 11 & -9 \end{bmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -14/11 \\ 0 & 1 & -9/11 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Detta ger lösningarna

$$\mathbf{v} = t\begin{bmatrix} 14/11 \\ 9/11 \\ 1 \end{bmatrix}$$

som efter normering med $t = 1/(14/11 + 9/11 + 1) = 11/34$ ger fördelningen

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 7/17 \\ 9/34 \\ 11/34 \end{bmatrix},$$

så exempelvis är $7/17$ av samtliga bilar på kontoret på Centralen.

8. (a) Antag att $n \geq 4$. De fyra första kolumnerna i A ser ut så här:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x^2 & (x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2 & \cdots \\ (x+1)^2 & (x+2)^2 & (x+3)^2 & (x+4)^2 & \cdots \\ (x+2)^2 & (x+3)^2 & (x+4)^2 & (x+5)^2 & \cdots \\ (x+3)^2 & (x+4)^2 & (x+5)^2 & (x+6)^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Vi subtraherar 3:e kolonnen ifrån den 4:e, 2:a kolonnen ifrån den 3:e och slutligen den 1:a kolonnen ifrån den 2:a. Detta ändrar inte värdet på determinanten och eftersom $(x+n)^2-(x+(n-1))^2=2x+2n-1$ så får vi då:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2x+3 & 2x+5 & \cdots \\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2x+5 & 2x+7 & \cdots \\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2x+7 & 2x+9 & \cdots \\ (x+3)^2 & 2x+7 & 2x+9 & 2x+11 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Vi subtraherar nu återigen 3:e kolonnen ifrån den 4:e och 2:a kolonnen ifrån den 3:e och får nu

$$\det(A)=\begin{vmatrix} x^2 & 2x+1 & 2 & 2 & \cdots \\ (x+1)^2 & 2x+3 & 2 & 2 & \cdots \\ (x+2)^2 & 2x+5 & 2 & 2 & \cdots \\ (x+3)^2 & 2x+7 & 2 & 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}=0,$$

eftersom två kolonner är identiska.

(b) Det räcker att ta ett exempel och beräkna determinanten och se att den inte blir noll. Sätt t ex $x=0$ vilket ger

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}=-8.$$

I själva verket är den -8 oavsett vilket x man väljer!