Matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola
Tentamen i Linjär algebra AT, MVE275, 2008-10-20.
Inga hjälpmedel är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Aron Lagerberg, 0762-721860.
Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

---

1. Låt A vara en $m \times n$-matris.

   (a) Bevisa att nollrummet till A, $\operatorname{Nul} A$, är ett delrum till $\mathbb{R}^n$.

   (b) Låt $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}^T$ vara den vektor i $\mathbb{R}^m$ som innehåller m stycken ettor. Visa att $W = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{u}\}$ INTE är ett delrum till $\mathbb{R}^n$.

   (6p)

2. Följande påståenden är antingen sanna eller falska. Du behöver bara svara sant eller falskt, men det är OK att motivera ditt svar om du vill. Rätt svar på en deluppgift ger $+1$ poäng, fel svar på en deluppgift ger -1 poäng och inget svar ger 0 poäng. Totalpoängen blir aldrig mindre än 0.

   (a) En reell 3×3-matris har minst ett reellt egenvärde.

   (b) Antag att A och B är två $m \times n$-matriser med linjärt oberoende kolumner. Då har också $A + B$ linjärt oberoende kolumner.

   (c) Låt $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$. Om $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ och $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = 0$ så är också $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = 0$.

   (d) Om A är inverterbar så har A^T linjärt oberoende kolumner.

   (e) För alla vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^n$ så gäller att $\| \mathbf{u} \|^2 + \| \mathbf{v} \|^2 \geq \| \mathbf{u} + \mathbf{v} \|^2$.

   (f) Om A är en symmetrisk $n \times n$ matris och $\mathbf{v}$ en n-vektor så är alltid $\| A\mathbf{v} \|^2 = \| \mathbf{v} \|^2$.

   (6p)

3. Låt
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 6 & 17 & 5 \\ -5 & 3 & 16 & 5 \end{bmatrix}.$$

   (a) Vad är rangen av $\operatorname{Col} A$?

   (b) Ge en bas för $\operatorname{Col} A$.

   (6p)

4. Vad är matrisen (i standardbasen) för den linjära avbildning i $\mathbb{R}^2$ som består av ortogonal projektion på linjen $y = x$ följt av rotation 60 grader moturs. (6p)

Var god vänd!

5. Låt

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 11 & -8 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 7 & -3 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till B. Tips: Ett av egenvärdena är 1.

(b) Är B diagonaliserbar? Om så är fallet så ange diagonal matris D och inverterbar matris P sådana att $A = PDP^{-1}$.

(8p)

6. Låt $W = \text{Span}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

(a) Ge en ortonormal bas för W.

(b) Utöka den ortonormala basen för W till en ortonormal bas för $\mathbb{R}^3$.

(6p)

7. Biluthyrningsfirman Hyr-Ett-Vrak har två kontor, ett på Centralen och ett på Landvetter. Av de bilar som är på Centralen i början av en vecka är 70% kvar där i början av veckan därpå, 10% finns på Landvetter och 20% är uthyrda. För Landvetter är motsvarande siffror att 60% är kvar på Landvetter, 10% är på Centralen och 30% är uthyrda. Av de som var uthyrda i början av en vecka är 50% det också veckan därpå, 30% är på Centralen och 20% på Landvetter. Till ägarens stora förvåning (han borde kanske ta en kurs i linjär algebra) så visar det sig att fördelningen av bilar stabiliserar sig efter ett tag. Bestäm fördelningen av bilar på Centralen, på Landvetter respektive som är uthyrda efter att den stabiliserat sig. (6p)

8. Låt x vara ett godtyckligt reellt tal. Vi definierar A som den $n \times n$-matris som har elementen $a_{ij} = (x + i + j - 2)^2$.

(a) Visa att $\det(A) = 0$ om $n \geq 4$.

(b) Visa att $\det(A) = 0$ inte alltid gäller om $n = 3$. (I själva verket gäller det aldrig, men du behöver inte visa detta. Fast en liten guldstjärna i kanten blir det.)

(6p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 30 oktober. Resultaten meddelas via e-post och tentorna kan avhämtas på expeditionen på Institutionen för matematiska vetenskaper som har öppet vardagar 8.30-13.00.

LYCKA TILL! Stefan.