Matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola
Fiktiv tentamen i Linjär algebra AT, MVE275, 2008-10-09.
Inga hjälpmedel är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: , 0762-721860.
Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

---

1. Bevisa att om A är en symmetrisk $n \times n$-matris så är två egenvektorer som hör till olika egenvärden ortogonala. (6p)

2. Följande påståenden är antingen sanna eller falska. Du behöver bara svara sant eller falskt. Rätt svar på en deluppgift ger $+1$ poäng, fel svar på en deluppgift ger -1 poäng och inget svar ger 0 poäng. Totalpoängen blir aldrig mindre än 0.

   (a) Om A är en $m \times n$-matris så är $\operatorname{Nul} A$ ett delrum till $\mathbb{R}^m$ och $\operatorname{Col} A$ ett delrum till $\mathbb{R}^n$.

   (b) Om A^T inte är inverterbar så är inte heller A inverterbar.

   (c) Om A är en $n \times n$-matris och $k \in \mathbb{R}$ så är $\det kA = k \cdot \det A$.

   (d) Om $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ är två egenvektorer till samma egenvärde så är de multipler av varandra.

   (e) Om A är en $m \times n$-matris med $n > m$ så är kolumnerna i A alltid linjärt beroende.

   (f) Om A är en $m \times n$-matris och B är en $n \times m$-matris så är aldrig $AB = BA$.

   (6p)

3. Är vektorerna
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 13 \\ -11 \end{bmatrix}$$
linjärt oberoende? Motivera ditt svar väl. (6p)

4. Bestäm koordinaterna för vektorn $\mathbf{v}$ i basen $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ om
$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}, \; \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \; \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$
(6p)

Var god vänd!

5. Låt $W = \text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ vara ett delrum till $\mathbb{R}^3$ med

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{och } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Bestäm en ortogonal bas för W.

   (b) Bestäm det minsta avståndet ifrån W till vektorn

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(6p)

6. Bestäm en matris som har egenvärdena 1, -1 och 2 samt egenvektorerna

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ och } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(6p)

7. Bestäm matrisen (i standardbasen) för den linjära avbildning från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$ som roterar 45 grader moturs kring linjen genom origo som har $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ som riktningsvektor. Med moturs avses här i förhållande till att man har fötterna i origo och huvudet i $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. (8p)

8. Spåret av en matris är summan av elementen på diagonalen. Vi betecknar spåret av en matris A med $sp(A)$, så speciellt för en 2×2-matris har vi att

$$sp(A) = a + d, \text{ om } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

   Vi betecknar determinanten av matrisen A med $det(A)$. Låt A vara en 2×2-matris.

   (a) Visa att

$$A^2 - sp(A)A + det(A)I = 0,$$

   där I är identitetsmatrisen och 0 (förstås) är en nollmatris.

   (b) Antag att $det(A) = 0$. Visa att i så fall är varje potens A^n med $n \in \mathbb{Z}_+$ en multipel av A, d v s $A^n = k_n A$ där $k_n \in \mathbb{R}$, samt bestäm k_n för alla $n \in \mathbb{Z}_+$.

(6p)

LYCKA TILL! Stefan.