

Vektorrum

Övningen handlar om att bekanta sig med olika begrepp relaterade till vektorrum. Begrepp som behandlas är bla *bas*, *kolumnrum*, *nollrum*, *rang* och *delrum*. Matlab-kommandon som man kan ha nytta av är främst *rank* och *null* (använd varianten med 'r') samt en utökad variant av *rref* som heter *ref* och som man bör börja med att hämta hem till sitt eget bibliotek ifrån kursens hemsida. När man laddat ned den kan man få reda på hur man använder den genom att skriva *help ref* (eller helt enkelt genom att titta i filen).

1. Första uppgiften handlar om att skapa ett litet bibliotek av Matlab-funktioner för att arbeta med delrum till vektorrum. Ett bra sätt att representera ett delrum (till \mathbb{R}^n) är som kolumner i en $m \times n$ -matris och huvuddelen av uppgiften är om att skapa funktioner som svarar på frågor om kolumnrummet till en matris. Ni ska också under arbetet skapa matriser för att testa era funktioner. Skapa följande Matlab-funktioner:
 - (a) **IsColIndependent(A)** – ska returnera “true” om kolumnerna i A är linjärt oberoende och “false” annars. (Tips: Vad gäller för rangen (*rank*) om de är linjärt oberoende.)
 - (b) **ColBase(A)** – ska returnera en bas för kolumnrummet till A . (Tips: Använd *ref* för att hitta kolumner i A som utgör en bas.)
*Anmärkning: Det finns en inbyggd funktion *orth* som bestämmer en (ortogonal) bas på ett helt annat sätt.*
 - (c) **IsColSubspace(A,B)** – ska returnera “true” om kolumnrummet till A är ett delrum till kolumnrummet till B . (Tips: För en vektor \mathbf{v} som ligger i kolumnrummet till B gäller att rangen av $[B \ \mathbf{v}]$ är samma som för B .)
 - (d) **IsSameColSpace(A,B)** – ska returnera “true” om kolumnrummet till A är identiskt med kolumnrummet till B . (Tips: De är identiska om och endast om de är delrum till varandra.)
 - (e) **IsColBasis(A,B)** – ska returnera “true” om kolumnrummet till B utgör en bas för kolumnrummet till A . (Tips: En bas är en linjärt oberoende mängd som spänner upp hela rummet. Använd två funktioner du redan gjort.)
 - (f) **IsSameNullSpace(A,B)** – ska returnera “true” om nollrummet till A är identiskt med nollrummet till B . (Tips: Funktionen *null* ger nollrummet som kolumner i en matris. Använd sedan **IsSameColSpace**.)
 - (g) **IsNullBasis(A,B)** – ska returnera “true” om kolumnrummet till B utgör en bas för nollrummet till A . (Tips: Funktionen *null* ger nollrummet som kolumner i en matris. Använd sedan **IsColBasis**.)
2. Vi ska nu använda oss av de funktioner ni skapade i förra deluppgiften och applicera dem på vektorrum av polynom. Vi betraktar

$$C = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$$

i vektorrummet av polynom av grad högst 3 där

$$\begin{aligned}p_1 &= 1 + 2x + 3x^2 \\p_2 &= x - 2x^2 + x^3 \\p_3 &= 2 + 2x + 10x^2 - 2x^3 \\p_4 &= -1 - 7x^2 + 2x^3.\end{aligned}$$

Kom ihåg att vi kan identifiera detta vektorrum med \mathbb{R}^4 genom att t ex använda standardbasen $\{1, x, x^2, x^3\}$. Använd era funktioner från första deluppgiften för att svara på följande frågor. Tips: För var och en av de fem deluppgifterna kan man använda sig av motsvarande deluppgift i första uppgiften.

- (a) Är $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ linjärt oberoende?
- (b) Bestäm en bas för $\text{Span}\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$.
- (c) Avgör om polynomen $p_5 = x + x^2$ och $p_6 = 1 + 3x + x^2 + x^3$ ligger i $\text{Span}\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$.
- (d) Avgör om $\text{Span}\{p_1, p_2\} = \text{Span}\{p_3, p_4\}$.
- (e) Avgör om $\{p_2, p_3\}$ är en bas för $\text{Span}\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$.

Uppgifterna ska redovisas skriftligt till Stefan. Sista inlämningsdag är måndagen den 28 september klockan 12:00. Instruktioner för redovisningen finns på hemsidan. Läs dessa noggrant!