Matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Lösningar till
Tentamen i Linjär algebra AT, MVE275, 2009-10-19

1. Se sats 5 i avsnitt 6.2 i boken.

2. (a) Falskt, man kan t ex ta $M = \{\mathbf{u}, 2\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ med $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ linjärt oberoende (d v s ej parallella). De är då linjärt beroende eftersom de två första är parallella, men $\mathbf{v}$ kan inte skrivas som linjärkombination av de två andra.

   (b) Sant, ty för det första så är $\mathbf{u}$ $n\times 1$ och $\mathbf{u}^T$ är $1\times n$ så A är $n\times n$-matris. Dessutom gäller per definition av matrismultiplikation att kolumnerna i A är linjärkombinationer av den enda kolumnen i $\mathbf{u}$ så alla kolumner i A är multiplar av $\mathbf{u}$ och alltså är $\text{rank}A = 1$.

   (c) Sant, ty det finns tre egenrum som var och en har dimension minst 1 och om ett av dessa har dimension minst 2 så blir den totala dimensionen av egenrummen minst 4 och därmed exakt 4 och därmed är A diagonaliserbar.

   (d) Falskt, vilket nästan vilket exempel som helst visar. I själva verket om A och B är symmetriska så är $(AB)^T = B^T A^T = BA$ så AB är symmetrisk om och endast om $AB = BA$.

   (e) Sant, för om $n > m$ så finns det fler kolumner än rader och då finns det minst 1 fri kolumn.

   (f) Falskt, det gäller alltid att $\det A^T = \det A$ så den angivna likhet gäller bara om $\det A = 0$.

3. Vi gör elementära radoperationer för att överföra matrisen på trappstegsform och utifrån denna finna dimensionen av nollrummet och en bas för detsamma.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 13 & -9 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & -5 & 13 & -9 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & -21 & 21 & -21 \end{bmatrix}$$
$$\longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Här ser vi att nollrummet har dimensionen 2 för det finns 2 fria kolumner. Vi sätter $x_3 = s$ och $x_4 = t$ och får då $x_2 = s - t$ och $x_1 = -2s + t$ så

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s+t \\ s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = s \cdot \mathbf{v}_1 + t \cdot \mathbf{v}_2$$

med $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ ett exempel på en bas för nollrummet.

4. Observera att den givna basen för W är ortogonal så projektionen ges av

$$\text{proj}_W\mathbf{y} = \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 = \frac{5}{14}\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix} + \frac{12}{3}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix}66\\-41\\61\end{bmatrix}.$$

Minsta avståndet mellan $\mathbf{y}$ och planet är avståndet mellan $\mathbf{y}$ och $\text{proj}_W\mathbf{y}$ som är

$$\|\mathbf{y} - \text{proj}_W\mathbf{y}\| = \left\|\frac{1}{14}\begin{bmatrix}70-66\\-42+41\\56-61\end{bmatrix}\right\| = \frac{1}{14}\left\|\begin{bmatrix}4\\-1\\-5\end{bmatrix}\right\| = \frac{1}{14}\sqrt{42}.$$

5. (a) Vi löser den karakteristiska ekvationen

$$0 = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix}-9-\lambda & 20\\ -4 & 9-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - 81 + 80 = \lambda^2 - 1,$$

så $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = -1$ är egenvärdena till matrisen.

Vi bestämmer egenvektorerna genom att lösa $(A-\lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ för de två egenvärdena. För $\lambda_1 = 1$ får vi

$$A - 1\cdot I = \begin{bmatrix}-10 & 20\\ -4 & 8\end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{bmatrix} \text{ så } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

är en egenvektor och för $\lambda_2 = -1$ får vi

$$A - (-1)\cdot I = \begin{bmatrix}-8 & 20\\ -4 & 10\end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix}2 & -5\\ 0 & 0\end{bmatrix} \text{ så } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$$

är en egenvektor. Alla egenvektorer ges av multiplar av $\mathbf{v}_1$ respektive $\mathbf{v}_2$.

(b) Den allmänna lösningen till $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ ges av

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2e^{\lambda_2 t} = c_1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}e^t + c_2\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}e^{-t}.$$

Begynnelsevillkoret $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ ger

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix} \Longleftrightarrow (c_1, c_2) = (-2, 1)$$

så lösningen är

$$\mathbf{x}(t) = (-2)\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}e^t + \begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}e^{-t} = \begin{bmatrix}-4e^t + 5e^{-t}\\ -2e^t + 2e^{-t}\end{bmatrix}.$$

6. (a) Vi har att $T(\mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_1$, $T(\mathbf{b}_2) = -\mathbf{b}_2$ och $T(\mathbf{b}_3) = \mathbf{b}_3$ så

$$T_B = \begin{bmatrix}[T(\mathbf{b}_1)]_B & [T(\mathbf{b}_2)]_B & [T(\mathbf{b}_3)]_B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

(b) Alla basvektorerna har längden 3 så genom att multiplicera alla med 1/3 så får vi en ON-bas och $P = \frac{1}{3}[\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3]$ blir en ON-matris. Matrisen för T i standardbasen ges av

$$A = PT_BP^{-1} = PT_BP^T = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 \\ 8 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. (a) Beteckna kolumnerna i A med $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ och de i B med $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r$. Element (i,j) i A^TB är i:te raden i A^T, d v s $\mathbf{a}_i^T$, gånger j:te kolumnen $\mathbf{b}_j$ i B. Alltså är element (i,j) lika med noll om och endast om $\mathbf{a}_i$ och $\mathbf{b}_j$ är ortogonala. Produkten blir alltså nollmatrisen om och endast om alla kolumner i B är ortogonala mot alla kolumner i A. Vektorrummet $(\operatorname{Col} A)^\perp$ består av **alla** vektorer som är ortogonala mot alla kolumner i A och därmed är produkten nollmatrisen om och endast om $\operatorname{Col} B$ är ett delrum till $(\operatorname{Col} A)^\perp$.

(b) Vi måste ha rangen 2 för en av matriserna och rangen 1 för den andra för annars blir en av dem nollmatrisen. Enligt första deluppgiften ska vi välja dem så att $\operatorname{Col} B$ är ett delrum till $(\operatorname{Col} A)^\perp$, d v s alla kolumner i B är ortogonala mot kolumnerna i A. En möjlighet är att ta en ortogonal bas, t ex $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ från förra uppgiften, och t ex sätta

$$A = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_2] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ och } B = [\mathbf{b}_3\ \mathbf{b}_3\ \mathbf{b}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Då är $\operatorname{rank} A = 2$ och $\operatorname{rank} B = 1$ samt $A^TB = 0$.

(c) Vi har alltid att $\operatorname{rank} A + \dim(\operatorname{Col} A)^\perp = \dim \operatorname{Col} A + \dim(\operatorname{Col} A)^\perp = 3$ och enligt första deluppgiften gäller att om $A^TB = 0$ så är $\operatorname{rank} B = \dim \operatorname{Col} B \leq \dim(\operatorname{Col} A)^\perp$. Alltså är

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leq \operatorname{rank} A + \dim(\operatorname{Col} A)^\perp = 3,$$

så därför är det omöjligt att få summan av deras rang lika med 4.

8. Förutsättningarna ger att

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1-\beta \\ 1-\alpha & \beta \end{bmatrix}$$

med $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$. Den karakteristiska ekvationen blir då

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & 1-\beta \\ 1-\alpha & \beta-\lambda \end{vmatrix} = (\alpha-\lambda)(\beta-\lambda) - (1-\alpha)(1-\beta) \\ &= \lambda^2 - (\alpha+\beta)\lambda + (\alpha+\beta-1) = (\lambda-1)(\lambda-(\alpha+\beta-1)), \end{aligned}$$

så att A har alltså egenvärdena $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = \alpha+\beta-1$. Dessutom gäller att

$$\lambda_2 = \alpha+\beta-1 \geq 0+0-1 \geq -1 \text{ och } \lambda_2 = \alpha+\beta-1 \leq 1+1-1 \leq 1$$

och därmed är saken klar.