Matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola
Tentamen i Linjär algebra AT, MVE275, 2009-10-19.
Inga hjälpmedel är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Oskar Hamlet, 0703-08 83 04.
Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

---

1. Låt $U = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r)$ vara en ortogonal bas för ett delrum V till $\mathbb{R}^n$. Visa att om
$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{r} c_j \mathbf{u}_j \in V$$
så gäller att j:te koefficienten för $\mathbf{y}$ i basen U ges av
$$c_j = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_j}{\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_j}.$$
(6p)

2. Följande påståenden är antingen sanna eller falska. Du behöver bara svara sant eller falskt, men det är OK att motivera ditt svar om du vill. Rätt svar på en deluppgift ger +1 poäng, fel svar på en deluppgift ger −1 poäng och inget svar ger 0 poäng. Totalpoängen blir aldrig mindre än 0 poäng.
   (a) Om M är en linjärt beroende mängd så kan varje vektor i M skrivas som en linjärkombination av de övriga.
   (b) Om $\mathbf{u}$ är en vektor i $\mathbb{R}^n$ så är $A = \mathbf{u}\mathbf{u}^T$ en $n \times n$-matris med $\operatorname{rank} A = 1$.
   (c) Om en 4×4-matris A har tre olika reella egenvärden och minst ett av egenrummen är 2-dimensionellt så är A diagonaliserbar (med reella matriser).
   (d) Om A och B är symmetriska matriser så är också AB symmetrisk.
   (e) Om A är en $m \times n$ matris med $n > m$ så har ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oändligt många lösningar.
   (f) Om A är en 3×3-matris så är $\det A^T = -\det A$.

(6p)

3. Låt
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 13 & -9 \end{bmatrix}.$$
   (a) Vad är dimensionen av $\operatorname{Nul} A$?
   (b) Ge en bas för $\operatorname{Nul} A$.

(6p)

Var god vänd!

4. Låt W vara planet genom origo som spänns upp av

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ och sätt } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

   (a) Bestäm ortogonala projektionen av $\mathbf{y}$ på W.

   (b) Bestäm minsta avståndet ifrån $\mathbf{y}$ till planet W.

(6p)

5. Låt

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 20 \\ -4 & 9 \end{bmatrix}.$$

   (a) Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till A.

   (b) Lös det linjära systemet av differentialekvationer $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ där $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(7p)

6. Vi har att

$$B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

   är en ortogonal bas för $\mathbb{R}^3$. Låt P vara planet genom origo som spänns upp av $\mathbf{b}_1$ och $\mathbf{b}_3$ och och låt $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildningen som består av spegling i planet P.

   (a) Bestäm matrisen T_B för T i basen B.

   (b) Bestäm matrisen A för T i standardbasen.

(6p)

7. Antag att A är en $m \times n$-matris och att B är en $m \times r$-matris.

   (a) Visa att $A^T B = 0$ om och endast om $\operatorname{Col} B$ är ett delrum till $(\operatorname{Col} A)^\perp$.

   (b) Ge exempel på 3×3-matriser A och B som inte någon är nollmatrisen sådana att $A^T B = 0$ och $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B = 3$.

   (c) Visa att det inte finns 3×3-matriser A respektive B sådana att $A^T B = 0$ och $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B = 4$?

(7p)

8. Låt A vara en stokastisk 2×2-matris, d v s alla element är större än eller lika med noll och summan av alla kolonner är ett. Visa att A har två reella egenvärden $\lambda_1 = 1$ och λ_2 med $-1 \leq \lambda_2 \leq 1$. (6p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 30 oktober. Resultaten meddelas via e-post och tentorna kan avhämtas på expeditionen på Institutionen för matematiska vetenskaper som har öppet vardagar 8.30-13.00.

LYCKA TILL! Stefan.