Föreläsning 2, Linjär algebra AT.

En $m \times n$-matris

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ med } a_{ij} \in \mathbb{R}, \text{ eller } A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \text{ med } \mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^m$$

Multiplikation av en $m \times n$-matris A och en n-vektor $\mathbf{x}$

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

Vektorekvation (linjärt ekvationssystem) $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$ som matrisekvation

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ där } A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

För homogent linjärt ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ gäller

- Alltid minst en lösning (den triviala $\mathbf{x} = \mathbf{0}$).
- Fler (och därmed oändligt många) lösningar omm fria kolumner.
- Lösningarna ges av Span$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ för några vektorer $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$.

För ett allmänt system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med en (partikulär-)lösning $\mathbf{x} = \mathbf{p}$ gäller att den allmänna lösningen ges av

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h,$$

där $\mathbf{v}_h$ är godtycklig lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

En mängd vektorer $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ är linjärt oberoende om

$$x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}, \text{ bara har trivial lösning } x_1 = \ldots = x_r = 0.$$

De är linjärt beroende om de inte linjärt oberoende.

Två vektorer är linjärt beroende omm de är parallella.

En godtycklig mängd vektorer är linjärt beroende omm minst en av dem kan skrivas som linjärkombination av de andra.