Föreläsning 4, Linjär algebra AT.

Algoritm för att bestämma inversen till en $n \times n$-matris A:

$$[A \;\; I_n] \Longleftrightarrow \text{ ... elementära radoperationer ... } \Longleftrightarrow \left[I_n \;\; A^{-1}\right]$$

Gausselimination på $m \times n$-matris A ger LU-faktorisering $A = LU$, där L är undertriangulär $m \times m$-matris med ettor på diagonalen och U är trappstegsform av A.

En $m \times n$-matris A ger upphov till matrisavbildning

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \;\; T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

En avbildning (funktion) är linjär om

- $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$,
- $T(c\mathbf{x}) = cT(\mathbf{x})$.

En avbildning $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ är linjär om och endast om den är en matrisavbildning $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ och matrisen ges av

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \dots T(\mathbf{e}_n)], \text{ där } [\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n] = I_n.$$

Exempel på geometriska avbildningar i $\mathbb{R}^2$ och/eller $\mathbb{R}^3$ som är linjära:

- Rotation kring origo/linje genom origo.
- Spegling i linje/plan som innehåller origo.
- Spegling i origo.
- Projektion på linje/plan som innehåller origo.
- Skalning.

En linjär avbildning $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ med matris $A = [\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n]$ är

- surjektiv $\Longleftrightarrow$ Span $\{\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n\} = \mathbb{R}^m$
- injektiv $\Longleftrightarrow$ $\{\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n\}$ är linjärt oberoende

Om $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ med A inverterbar så så är T en inverterbar avbildning och $T^{-1}(\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{x}$.

Om $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ med $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ och $T_B : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ med $T_B(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$, så är sammansättningen $T_B \circ T_A$ också linjär och

$$T_B \circ T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p, \;\; T_B \circ T_A(\mathbf{x}) = (BA)x.$$